6 Modellering

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten PC. Regn uten kalkulator der tallene er enkle. Fasiten står bakerst.

Formelark

MODELLER OG PREMISSER

Presentere en modell
problem, premisser, modell, resultat, vurdering

- En modell er en forenkling. Svaret gjelder bare hvis premissene stemmer.
- Vurder om svaret er rimelig, og når modellen gjelder.

REGRESJON

Lineær

$$f(x) = ax + b$$

Andregrad

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Eksponentiell

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Avvik

$$\text{måling} - \text{modell}$$

- Velg type ut fra formen på dataene, og sjekk avvik og R^2.
- Sjekk at modellen gir rimelige svar, også utenfor målingene.

FIGURTALL OG MODELLERINGSPROSESSEN

Triangeltall

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

Modelleringsprosessen
forstå → premisser → modell → løs → vurder → presenter

- Finn mønsteret ved å se på differansen mellom tallene.
- Test hva som skjer når et premiss endres.

6.1.1 Hva er en modell?

EKSEMPEL *Pizzabestilling*

En klasse på 28 elever skal bestille pizza. Anta at hver elev spiser 3 biter, og at en pizza har 8 biter. Hvor mange pizzaer må bestilles? Hva om hver spiser 4 biter?

Løsning

Med 3 biter hver blir det $28 \cdot 3 = 84$ biter, og $\frac{84}{8} = 10{,}5$. Vi må runde opp, så det trengs 11 pizzaer.

Med 4 biter hver blir det $28 \cdot 4 = 112$ biter, og $\frac{112}{8} = 14$. Da trengs 14 pizzaer.

Premisset om hvor mye hver spiser, endrer svaret med 3 pizzaer. ■

EKSEMPEL *Hva koster det å eie en bil?*

Anta at en bil har faste kostnader på 40 000 kr i året (forsikring, avgifter og verdifall), og at hver kilometer koster 1,50 kr i drivstoff og slitasje. Kostnaden for x kilometer er $K(x) = 40\,000 + 1{,}5\,x$. Hva koster det for 10 000 km og for 20 000 km?

Løsning

$K(10\,000) = 40\,000 + 15\,000 = 55\,000$ kr. $K(20\,000) = 40\,000 + 30\,000 = 70\,000$ kr.

Antakelsen om hvor mye bilen kjøres, avgjør svaret. Modellen sier ikke hva det koster, bare hva det koster *hvis* vi kjører så langt. ■

EKSEMPEL *Reisetid*

Skoleveien er 12 km. Modellen er $t = \frac{s}{v}$ med snittfart v. Hva blir tiden i minutter med snittfart 24 km/h og 20 km/h?

Løsning

Med 24 km/h er $t = \frac{12}{24} = 0{,}5$ t $= 30$ min. Med 20 km/h er $t = \frac{12}{20} = 0{,}6$ t $= 36$ min.

Modellen ser bort fra stopp og kø. Premisset om snittfarten gjør at svaret varierer med seks minutter. ■

6.1 En klasse på 30 elever bestiller pizza. Hver spiser 3 biter, og en pizza har 8 biter. Hvor mange pizzaer må bestilles?

6.2 En gruppe på 20 elever skal bestille pizza. Hver spiser 4 biter, og en pizza har 8 biter. Hvor mange pizzaer trengs?

6.3 Hva er en opplysning, og hva er en antakelse?

a) Klassen har 25 elever.

b) Alle elevene spiser like mye.

6.4 Kostnaden for en bil er $K(x) = 40\,000 + 1{,}5\,x$ kroner for x kilometer. Hva koster

a) 12 000 km?

b) 30 000 km?

c) Hvor mange kilometer gir 100 000 kr?

6.5 Veien til skolen er 15 km. Hvor lang tid tar den, i minutter, med snittfart

a) 30 km/h?

b) 20 km/h?

6.6 En panelovn på 1,5 kW står på 5 t per dag i 30 dager. Strømprisen er 1,20 kr/kWh.

a) Hvor mange kWh er det?

b) Hva koster det?

c) Hva koster det hvis den står på 8 t per dag?

6.7 En dusj bruker 8 liter vann i minuttet. Hver av 4 personer dusjer 5 minutter per dag. Hvor mange liter vann går det til dusjing i løpet av 30 dager?

6.8 Modellen sier at en bil koster 70 000 kr for 20 000 km. Hva betyr det?

6.9 Ola regner ut at 28 elever som spiser 3 biter trenger $\frac{84}{8} = 10{,}5$ pizzaer, og bestiller 10. Hva er galt?

6.10 Hva blir utskriften?

Python

```
for km in [10000, 20000]:
    print(km, 40000 + 1.5 * km)
```

6.11 Hva blir utskriften?

Python

```
elever = 28
biter = 3
print(elever * biter / 8)
```

6.12 Nevn tre premisser du må velge for å lage en modell for hvor mye vann en klasse drikker i løpet av en uke.

6.13 Forklar hvorfor det er viktig å oppgi premissene sammen med svaret.

6.1.2 Bruke og vurdere modeller

EKSEMPEL *Abonnentene*

Modellen $f(x) = 15x + 200$ gir antall abonnenter etter x måneder. Hva forteller 15 og 200? Hva blir antallet etter 24 måneder?

Løsning

Tallet 15 er økningen: 15 nye abonnenter per måned. Tallet 200 er startverdien: 200 abonnenter ved start.

$f(24) = 15 \cdot 24 + 200 = 560$. Etter 24 måneder sier modellen 560 abonnenter. ∎

EKSEMPEL *Bakteriene*

En bakteriekultur starter med 100 bakterier og dobles hver time: $f(x) = 100 \cdot 2^x$. Hva sier modellen om antallet etter 10 timer og etter 24 timer? Er det rimelig?

Løsning

$f(10) = 100 \cdot 2^{10} = 102\,400$. Det kan være rimelig.

$f(24) = 100 \cdot 2^{24} = 1\,677\,721\,600 \approx 1{,}7 \cdot 10^9$. Det er over en milliard bakterier, og det er ikke rimelig i en vanlig prøve: Næring og plass vil gå tom, og veksten stopper. Modellen gjelder trolig bare noen timer. ∎

EKSEMPEL *En presentasjon*

Presenter svaret på «Hvor mange abonnenter har avisen etter 24 måneder?» etter punktene over.

Løsning

Problem: Antall abonnenter om 24 måneder. **Premiss:** Avisen har 200 abonnenter nå og får 15 nye per måned, hver måned. **Modell:** $f(x) = 15x + 200$, der x er antall måneder. **Resultat:** $f(24) = 560$ abonnenter. **Vurdering:** Modellen bygger på jevn vekst. Dersom veksten flater ut eller kampanjer endrer den, blir tallet et annet. Den er mest pålitelig for noen måneder fram i tid. ∎

6.14 Antall abonnenter er $f(x) = 20x + 150$ etter x måneder.

a) Hva forteller 20?

b) Hva forteller 150?

c) Hvor mange abonnenter er det etter 12 måneder?

6.15 Modellen $f(x) = 20x + 150$ er laget ut fra de første 12 månedene. Hvor pålitelig er svaret for $x = 60$, som er 1 350?

6.16 Antall bakterier er $f(x) = 50 \cdot 2^x$ etter x timer.

a) Hvor mange er det etter 10 timer?

b) Hvor mange er det omtrent etter 24 timer? Skriv på standardform.

c) Er svaret i b) rimelig?

6.17 Folketallet i en kommune er $f(x) = 8\,000 + 50x$, der x er antall år etter 2015. Hva sier modellen for 2040? Er prognosen sikker?

6.18 Høyden til et lys er $h(t) = 40 - 2t$ centimeter etter t timer.

a) Hva er høyden etter 10 timer?

b) Når er lyset brent ned?

6.19 En modell gir -12 liter i en tank etter 20 minutter. Er svaret rimelig?

6.20 Hva mangler i svaret «Svar: 390»?

6.21 Avisen har 150 abonnenter, og får 20 nye per måned i 6 måneder, og så 30 per måned. Hvor mange abonnenter er det etter 12 måneder?

6.22 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in [0, 6, 12]:
    print(x, 20 * x + 150)
```

6.23 Ola sier at modellen er riktig fordi den treffer to av målingene. Hva er galt?

6.24 Forklar hvorfor en modell bare gjelder i et område.

6.25 Presenter modellen $f(x) = 20x + 150$ for abonnenter etter de fem punktene: problem, premisser, modell, resultat og vurdering.

6.2.1 Regresjon med Python

6.26 Python gir `3.0 1.0` for lineær regresjon.

a) Skriv modellen $f(x) = ax + b$.

b) Hva er $f(8)$?

c) For hvilken x er $f(x) = 19$?

6.27 Python gir `2.0 1.0 0.0` for andregradsregresjon. Skriv modellen, og regn ut $f(3)$.

6.28 Python gir `50.0 3.0` for eksponentiell regresjon, der første tall er a og andre er b i $f(x) = a \cdot b^x$. Hva er $f(4)$?

6.29 Modellen er $f(x) = 3x + 1$. Målingene er $(1, 5)$, $(2, 6)$ og $(3, 11)$. Finn avvikene (måling minus modell).

6.30 Hvilken type regresjon passer best?

a) y: $2, 4, 8, 16$

b) y: $2, 5, 8, 11$

c) y: $0, 1, 4, 9$

6.31 Regresjon gir $f(x) = 8x + 15$ for antall solgte is, der x er temperaturen i grader. Hva forteller 8? Hva er salget ved 20 °C?

6.32 Regresjon gir $f(x) = 3{,}5\,x + 20$ for besøkende per dag, der x er antall uker. Hva er prognosen for uke 10?

6.33 Python gir `3.0 1.0`, og Kari skriver modellen som $f(x) = 1x + 3$. Hva er riktig modell?

6.34 Hva blir utskriften?

Python

```
a, b = 2.0, 5.0
for x in [1, 2, 3]:
    print(x, a * x + b)
```

6.35 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 4):
    print(x, 100 * 2**x)
```

6.36 Andregradsregresjon gir $f(x) = -x^2 + 6x$. Hva er det høyeste punktet på grafen?

6.37 Forklar hvorfor regresjonslinja ikke går gjennom alle målepunktene.

6.2.2 Velge regresjonsmodell

EKSEMPEL *Avvik fra en eksponentiell modell*

Målingene for $x = 0, 1, ..., 5$ er $10, 21, 38, 82, 160, 330$. Modellen er $f(x) = 10 \cdot 2^x$. Finn avvikene (måling minus modell).

Løsning

Modellverdiene er $10, 20, 40, 80, 160, 320$. Avvikene er $0, 1, -2, 2, 0, 10$. De er små i forhold til målingene, så modellen passer godt. ■

EKSEMPEL *Rimelig modell?*

Den lineære modellen for bakteriedataene er omtrent $f(x) = 58{,}9\,x - 40{,}4$. Hva sier den om $f(0)$? Er det rimelig?

Løsning

$f(0) = -40{,}4$. Det betyr et negativt antall bakterier ved start, og det er urimelig. Vi målte 10 bakterier. Den lineære modellen passer dårlig, både i tall ($R^2 = 0{,}81$) og i betydning. ■

6.38 Hvilken modelltype passer best?

a) y øker med omtrent 4 for hver x.

b) y ganges med omtrent 1,5 for hver x.

c) y øker først og synker så, som en bue.

6.39 For et datasett er R^2 lik 0,62 for lineær, 0,97 for andregrad og 0,99 for eksponentiell modell. Hvilken passer best med dataene?

6.40 Modellen er $f(x) = 10 \cdot 2^x$. Målingene er 82 for $x = 3$ og 160 for $x = 4$. Finn avvikene.

6.41 Modellen er $f(x) = 5 \cdot 3^x$, og målingene for $x = 0, 1, 2, 3$ er $5, 16, 44, 140$. Finn avvikene.

6.42 En modell gir $f(0) = -12$ for antall bakterier ved start. Hva sier det om modellen?

6.43 Den eksponentielle modellen er $f(x) = 5 \cdot 3^x$. Hva sier den for $x = 5$?

6.44 To modeller har $R^2 = 0{,}99$ og $R^2 = 0{,}97$. Den første gir negative verdier for små x, og den andre gir rimelige verdier. Hvilken bør du velge?

6.45 Lise sier at siden R^2 er nær 1, er modellen sann for alle x. Hva er galt?

6.46 Hva blir utskriften?

Python

```
y = [5, 16, 44, 140]
for x in range(4):
    print(x, y[x] - 5 * 3**x)
```

6.47 Hva blir utskriften?

Python

```
y = [10, 21, 38, 82]
for x in range(4):
    print(x, y[x] - 10 * 2**x)
```

6.48 Forklar hvorfor vi bør se på (plotte) dataene før vi velger regresjonstype.

6.3.1 Figurtall

EKSEMPEL *Fyrstikkfigurene*

Figur 1 har 4 fyrstikker, figur 2 har 7 og figur 3 har 10. Finn en formel for antall fyrstikker i figur n, og regn ut figur 10.

Løsning

Hvert nye kvadrat gir 3 fyrstikker til, så differansen er 3. Formelen er $3n + c$. For $n = 1$ er $3 + c = 4$, så $c = 1$.

Formelen er $3n + 1$. For figur 10: $3 \cdot 10 + 1 = 31$ fyrstikker. ■

EKSEMPEL *Triangeltall*

Hva er triangeltall nummer 20?

Løsning

$$\frac{20 \cdot 21}{2} = \frac{420}{2} = 210.$$ ■

6.49 Tallrekka er $7, 11, 15, 19, ...$

a) Finn en formel for tall nummer n.

b) Hva er tall nummer 10?

6.50 Tallrekka er $2, 5, 8, 11, ...$ Finn en formel, og regn ut tall nummer 20.

6.51 Hva er kvadrattall nummer

a) 9?

b) 12?

6.52 Hva er triangeltall nummer

a) 8?

b) 15?

6.53 Figur n har $2n + 1$ fyrstikker.

a) Hvor mange fyrstikker har figur 12?

b) Hvilken figur har 51 fyrstikker?

6.54 Tallrekka er $3, 8, 15, 24, ...$ Formelen er $n^2 + 2n$. Hva er tall nummer 7?

6.55 Tallrekka er $2, 5, 10, 17, \ldots$ Finn en formel, og regn ut tall nummer 6.

6.56 Ola ser tallrekka $6, 10, 14, \ldots$ og gjetter formelen $6n$. Hva er riktig formel? Hva er tall nummer 5?

6.57 Hva blir utskriften?

Python

```
for n in range(1, 5):
    print(n, 4 * n + 3)
```

6.58 Hva blir utskriften?

Python

```
for n in range(1, 5):
    print(n, n * n)
```

6.59 Hva er $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$?

6.60 I en gruppe på 8 personer hilser alle på alle én gang. Hvor mange håndhilsninger er det?

6.61 Forklar hvorfor triangeltall nummer n er $\frac{n(n+1)}{2}$.

6.4.1 Modelleringsprosessen

EKSEMPEL *Elsykkel eller buss?*

Busskortet koster 900 kr i måneden. Elsykkelen koster 18 000 kr og 150 kr i måneden i vedlikehold. Etter hvor mange måneder lønner sykkelen seg? Gå gjennom stegene.

Løsning

1. Forstå: Vi vil finne når det totalt er billigere å bruke sykkel enn buss.

2. Premisser: Du bruker sykkelen i stedet for bussen hele tiden. Sykkelen har ingen salgsverdi, og vi ser bort fra renter og tyveri.

3. Modell: Med x måneder er kostnaden med sykkel $S(x) = 18\,000 + 150x$, og med buss $B(x) = 900x$.

4. Løs: $18\,000 + 150x = 900x$ gir $750x = 18\,000$, så $x = 24$. Etter 24 måneder koster begge $900 \cdot 24 = 21\,600$ kr.

5. Vurder: For mer enn 24 måneder er sykkelen billigst. Men modellen ser bort fra salgsverdi, og antar at du faktisk bruker sykkelen i stedet for bussen.

6. Presenter: «Under de gitte antakelsene lønner sykkelen seg etter 24 måneder, altså to år.»

■

EKSEMPEL *Salgsverdi*

Anta at du kan selge sykkelen for 6 000 kr etter 24 måneder. Hva er kostnaden med sykkel etter 24 måneder nå? Hva er forskjellen til bussen?

Løsning

Kostnaden med sykkel er $S(24) - 6\,000 = 21\,600 - 6\,000 = 15\,600$ kr. Bussen koster 21 600 kr. Sykkelen er 6 000 kr billigere, så den lønner seg enda tidligere.

■

6.62 Hva er det første steget i en modelleringsprosess?

6.63 Kostnaden med elsykkel er $S(x) = 18\,000 + 150x$, og med buss $B(x) = 900x$.

a) Etter hvor mange måneder koster de like mye?

b) Hva koster begge da?

6.64 Bruk modellen fra forrige oppgave. Hvilket alternativ er billigst etter 36 måneder?

6.65 Egen bil koster 3 500 kr per måned pluss 2 kr per kilometer. Delebil koster 600 kr per måned pluss 7 kr per kilometer.

a) Ved hvor mange kilometer per måned koster de likt?

b) Hvilket er billigst for 300 km?

6.66 Elsykkelen kan selges for 6 000 kr etter 24 måneder. Hva er den samlede kostnaden med sykkel etter 24 måneder, og hvor mye billigere enn bussen (21 600 kr) er det?

6.67 Busskortet koster 1 000 kr per måned. Etter hvor mange hele måneder er sykkelen billigst?

6.68 Senter A koster 400 kr per måned. Senter B koster 1 000 kr i innmelding og 250 kr per måned. Etter hvor mange hele måneder er B billigst?

6.69 Ola setter opp $S(x) = 18\,000$ for sykkelen. Hva har han glemt?

6.70 Modellen sier at sykkel og buss koster likt etter 24 måneder. Hva betyr det i praksis?

6.71 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in [12, 24, 36]:
    print(x, 18000 + 150 * x, 900 * x)
```

6.72 Velg et valg du står overfor. Skriv kort hva du gjør i hvert av de seks stegene i modelleringsprosessen.

6.73 Forklar hvorfor det er lurt å teste hva som skjer når et premiss endres.

6.4.2 Selvstendig arbeid

EKSEMPEL *Et eksempel på en plan*

Problemstilling: «Hvor mye må jeg spare per måned for å kunne kjøpe en bruktbil til 60 000 kr om 2 år?»

Løsning

Premiss: Jeg sparer det samme beløpet hver måned og har 0 kr nå, og ingen rente. Modell: $f(x) = a \cdot x$, der x er antall måneder og a er sparebeløpet. Etter 24 måneder skal $24a = 60\,000$, så $a = 2\,500$ kr per måned. Vurdering: Hvis jeg får rente, trenger jeg litt mindre. Hvis bilen blir dyrere, trenger jeg mer. Jeg tester med 3 % rente og 65 000 kr i pris. ∎

6.74 Hvilken er en god problemstilling: «Økonomi», «Biler er dyre» eller «Hvor mye må jeg spare per måned for å kjøpe en bruktbil til 60 000 kr om to år?»

6.75 Hvor mye må du spare per måned for å ha 60 000 kr om 2 år, uten rente?

6.76 Nevn tre ting som skal stå i en rapport om et modelleringsarbeid.

6.77 Rapporten sier «Bensin koster 21 kr per liter.» Hva bør du gjøre?

6.78 Hva betyr det å teste et annet premiss, og hvorfor er det nyttig?

6.79 Hva kan du utelate i en kort presentasjon, og hva bør være med?

6.80 Skriv en problemstilling om strømforbruk hjemme som du kan svare på med en modell.

6.81 Velg en problemstilling, og skriv en plan med de seks stegene i modelleringsprosessen.

6.82 Forklar hvorfor en rapport ikke bare skal være tall.

Fasit

6.1.1 Hva er en modell?

6.1

$30 \cdot 3 = 90$ biter, og $\frac{90}{8} = 11{,}25$. Det må bestilles 12 pizzaer.

6.2

$20 \cdot 4 = 80$ biter, og $\frac{80}{8} = 10$ pizzaer.

6.3

a) Opplysning
b) Antakelse (premiss)

6.4

a) 58 000 kr
b) 85 000 kr
c) $1{,}5\ x = 60\,000$, så $x = 40\,000$ km

6.5

a) $\frac{15}{30} = 0{,}5\ t = 30$ min
b) $\frac{15}{20} = 0{,}75\ t = 45$ min

6.6

a) $1{,}5 \cdot 5 \cdot 30 = 225$ kWh
b) $225 \cdot 1{,}20 = 270$ kr
c) $1{,}5 \cdot 8 \cdot 30 = 360$ kWh, som koster 432 kr

6.7

Per person per dag: $8 \cdot 5 = 40$ L. Til sammen: $4 \cdot 40 \cdot 30 = 4\,800$ L.

6.8

Det er et anslag som gjelder hvis premissene stemmer: faste kostnader 40 000 kr og 1,50 kr per kilometer. Virkelige kostnader kan avvike.

6.9

Det blir for lite pizza. Han må avrunde opp til 11 pizzaer.

6.10

```
10000 55000.0
20000 70000.0
```

6.11

```
10.5
```

6.12

For eksempel: hvor mange elever som drikker vann, hvor mange glass hver drikker per dag, hvor mye vann i hvert glass og hvor mange dager skolen er i gang.

6.13

Svaret gjelder bare hvis premissene stemmer. Når de oppgis, kan andre vurdere om svaret passer for dem og regne på nytt med andre antakelser.

6.1.2 Bruke og vurdere modeller

6.14

a) 20 nye abonnenter per måned
b) 150 abonnenter ved start
c) $20 \cdot 12 + 150 = 390$

6.15

Det er usikkert, fordi 60 måneder ligger langt utenfor perioden modellen er laget for. Veksten kan ha endret seg.

6.16

a) $50 \cdot 1\,024 = 51\,200$
b) $50 \cdot 2^{24} = 838\,860\,800 \approx 8{,}4 \cdot 10^8$
c) Nei, i en prøve vil næringen gå tom lenge før det.

6.17

$x = 25$, så $f(25) = 8\,000 + 1\,250 = 9\,250$. Prognosen er usikker, fordi det er langt fram i tid.

6.18

a) 20 cm
b) $40 - 2t = 0$ gir $t = 20$ timer.

6.19

Nei, en tank kan ikke inneholde negative liter. Tanken er tom før 20 minutter.

6.20

Enhet («abonnenter»), hva tallet betyr («etter 12 måneder»), premissene og hvor pålitelig svaret er.

6.21

Etter 6 måneder: $150 + 120 = 270$. Så $30 \cdot 6 = 180$. Til sammen 450 abonnenter.

6.22

```
0 150
6 270
12 390
```

6.23

Å treffe noen målinger viser ikke at modellen er riktig andre steder. Vi må sjekke mot flere målinger og vurdere antakelsene.

6.24

Modellen bygger på antakelser som holder i en periode, og utenfor kan de ikke lenger stemme. Da blir svarene usikre eller urimelige, for eksempel negative mengder.

6.25

Problem: Antall abonnenter etter x måneder. Premiss: 150 i dag og 20 nye per måned. Modell: $f(x) = 20x + 150$.

Resultat: Etter 12 måneder er det 390 abonnenter. Vurdering: Modellen bygger på jevn vekst, og er usikker over lang tid.

6.2.1 Regresjon med Python

6.26

a) $f(x) = 3x + 1$
b) 25
c) $3x = 18$, så $x = 6$

6.27

$f(x) = 2x^2 + x$, og $f(3) = 18 + 3 = 21$.

6.28

$50 \cdot 3^4 = 50 \cdot 81 = 4\,050$

6.29

Modellverdiene er 4, 7 og 10. Avvikene er 1, -1 og 1.

6.30

a) Eksponentiell
b) Lineær
c) Andregrad

6.31

For hver grad varmere selges 8 flere is. $f(20) = 160 + 15 = 175$.

6.32

$3{,}5 \cdot 10 + 20 = 55$

6.33

Det første tallet er stigningstallet. Riktig er $f(x) = 3x + 1$.

6.34

```
1 7.0
2 9.0
3 11.0
```

6.35

```
0 100
1 200
2 400
3 800
```

6.36

Nullpunktene er 0 og 6, så toppunktet har $x = 3$, og $f(3) = -9 + 18 = 9$.

6.37

Målinger ligger sjelden nøyaktig på en rett linje. Regresjonen finner den linja som ligger nærmest alle punktene samlet.

6.2.2 Velge regresjonsmodell

6.38

a) Lineær
b) Eksponentiell
c) Andregrad

6.39

Eksponentiell, fordi R^2 er nærmest 1.

6.40

$f(3) = 80$ og $f(4) = 160$. Avvikene er $82 - 80 = 2$ og $160 - 160 = 0$.

6.41

Modellverdiene er $5, 15, 45, 135$.

Avvikene er 0, 1, -1 og 5.

6.42
Antall bakterier kan ikke være negativt, så modellen passer dårlig, selv om den kan se grei ut for noen målinger.

6.43
$5 \cdot 3^5 = 5 \cdot 243 = 1\,215$

6.44
Den andre. En modell må gi rimelige svar, ikke bare ha høyest R^2.

6.45
R^2 sier bare hvor godt modellen passer med dataene vi har. Utenfor målingene kan den være urimelig.

6.46

```
0 0
1 1
2 -1
3 5
```

6.47

```
0 0
1 1
2 -2
3 2
```

6.48
Formen på dataene viser hva som passer: rett linje peker mot lineær, stadig brattere kurve mot eksponentiell, en bue mot andregrad. Feil type kan gi dårlig passform eller urimelige svar.

6.3.1 Figurtall

6.49
a) Differansen er 4, og $4 \cdot 1 + c = 7$ gir $c = 3$. Formelen er $4n + 3$.
b) $4 \cdot 10 + 3 = 43$

6.50
Formelen er $3n - 1$. Tall nummer 20 er 59.

6.51
a) 81
b) 144

6.52
a) $\dfrac{8 \cdot 9}{2} = 36$
b) $\dfrac{15 \cdot 16}{2} = 120$

6.53
a) 25
b) $2n + 1 = 51$ gir $n = 25$

6.54
$49 + 14 = 63$

6.55
Tallene er $n^2 + 1$. Tall nummer 6 er 37.

6.56
Differansen er 4, så formelen er $4n + 2$. Tall nummer 5 er 22. Olas formel gir 12 for $n = 2$, og det stemmer ikke.

6.57

```
1 7
2 11
3 15
4 19
```

6.58

```
1 1
2 4
3 9
4 16
```

6.59
Det er triangeltall nummer 50:
$\dfrac{50 \cdot 51}{2} = 1\,275$.

6.60
$7 + 6 + \cdots + 1 = \dfrac{7 \cdot 8}{2} = 28$

6.61
To like triangler passer sammen til et rektangel med n rader og $n + 1$ prikker i hver rad. Rektangelet har $n(n + 1)$ prikker, og hvert triangel er halvparten.

6.4.1 Modelleringsprosessen

6.62
Å forstå problemet.

6.63
a) $750x = 18\,000$ gir $x = 24$
b) $900 \cdot 24 = 21\,600$ kr

6.64
$S(36) = 23\,400$ kr og $B(36) = 32\,400$ kr. Sykkel er billigst.

6.65
a) $3\,500 + 2x = 600 + 7x$ gir $x =$ 580 km
b) Egen bil koster 4 100 kr, og delebil 2 700 kr. Delebil er billigst.

6.66
$21\,600 - 6\,000 = 15\,600$ kr. Det er 6 000 kr billigere enn bussen.

6.67
$18\,000 + 150x = 1\,000x$ gir $x \approx 21{,}2$.
Etter 21 måneder er bussen billigst (21 000 mot 21 150), og etter 22 måneder er sykkelen billigst. Svaret er 22.

6.68
$400x = 1\,000 + 250x$ gir $x \approx 6{,}7$. Etter 6 måneder koster A 2 400 og B 2 500. Etter 7 måneder koster A 2 800 og B 2 750. Svaret er 7 måneder.

6.69
Vedlikeholdet på 150 kr per måned. Riktig modell er $18\,000 + 150x$.

6.70
Før 24 måneder er bussen billigst, og etter 24 måneder er sykkelen billigst.

6.71

```
12 19800 10800
24 21600 21600
36 23400 32400
```

6.72
For eksempel valget mellom to treningssentre. Forstå: hvilket er billigst for et år? Premisser: du trener like mye hver måned. Modell: en funksjon for hver. Løs: finn skjæringspunktet. Vurder: er det rimelig, og hva om du trener mer? Presenter: svar med premisser og begrensninger.

6.73
Premissene er antakelser vi ikke er sikre på. Ved å endre dem ser vi om konklusjonen er robust eller avhenger sterkt av en antakelse.

6.4.2 Selvstendig arbeid

6.74
Den siste. Den er et konkret spørsmål som kan besvares med en modell. De to første er et tema og en påstand.

6.75
$\dfrac{60\,000}{24} = 2\,500$ kr per måned

6.76
For eksempel problemstilling, premisser, modell, resultat med enhet, vurdering av modellen og kilder.

6.77
Oppgi hvor og når tallet er hentet fra, siden priser endrer seg.

6.78
Å regne på nytt med en annen antakelse, for eksempel en annen rente eller pris. Det viser hvor mye svaret avhenger av antakelsen.

6.79
Utelat lange utregninger. Ha med problemstilling, de viktigste premissene, modell, resultat og vurdering, gjerne med en graf eller tabell.

6.80
For eksempel: «Hvor mye kan vi spare på strømregningen i året ved å bytte en gammel panelovn med en varmepumpe?»

6.81
En god plan har forstå, premisser, modell, regning, vurdering og presentasjon, med tall og kilder.

6.82
Tallene sier ingenting uten tekst som forklarer hva de betyr, hva som er antatt og hvor pålitelig svaret er.