5 Funksjoner

OPPGAVEHEFTE · MATEMATIKK 1P

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten PC. Regn uten kalkulator der tallene er enkle. Der oppgaven bruker en graf, er den beskrevet med en tabell. Fasiten står bakerst.

Formelark

INFORMASJON FRA GRAFER OG Å TEGNE DEM

Nullpunkt

$$f(x) = 0$$

Skjæringspunkt

$$f(x) = g(x)$$

- Les y ved en gitt x, og x ved en gitt y. Det kan være flere løsninger.
- Krumme grafer trenger mange punkter, og kurven skal være jevn.

PROPORSJONALITET

Proporsjonal

$$y = k \cdot x$$

Omvendt proporsjonal

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \cdot y = k$$

- Proporsjonal: forholdet $\frac{y}{x}$ er konstant. Omvendt proporsjonal: produktet $x \cdot y$ er konstant.

ANDRE- OG TREDJEGRADSFUNKSJONER

Andregradsfunksjon

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Topp eller bunn ved symmetri

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Tredjegradsfunksjon

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- $a > 0$: bunnpunkt. $a < 0$: toppunkt.

EKSPONENTIALFUNKSJONER

Eksponentialfunksjon

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Vekstfaktor fra prosent

$$b = 1 \pm \frac{p}{100}$$

- $a = f(0)$ er startverdien.
- $b > 1$ gir vekst, og $0 < b < 1$ gir nedgang.

5.1.1 Funksjonsbegrepet

EKSEMPEL *Er det en funksjon?*

a) Til hvert klokkeslett hører en temperatur. Er det en funksjon fra klokkeslett til temperatur?

b) Er det en funksjon fra temperatur til klokkeslett?

Løsning

a) Ja. Ved hvert klokkeslett er det nøyaktig én temperatur.

b) Nei. Temperaturen $5\,^\circ$ C kan høre til flere klokkeslett, for eksempel 7 om morgenen og 22 om kvelden. Da gir én verdi inn to verdier ut.

■

EKSEMPEL *Fra tabell til formel*

Tabellen viser en lineær funksjon. Finn formelen.

x	0	1	2	3
$f(x)$	4	7	10	13

Løsning

$f(x)$ øker med 3 for hver enhet x, så $a = 3$. Verdien for $x = 0$ er 4, så $b = 4$. Formelen er $f(x) = 3x + 4$.

■

EKSEMPEL *Tabell med samme inngangsverdi to ganger*

x	1	2	2	3
y	5	7	9	11

Viser tabellen en funksjon?

Løsning

Nei. Verdien $x = 2$ står to ganger, med $y = 7$ og $y = 9$. Da hører det to ulike verdier til $x = 2$, og det er ikke en funksjon. I en graf kan vi se det ved at en loddrett linje treffer grafen i mer enn ett punkt.

■

EKSEMPEL *Hvilke verdier gir mening?*

Prisen på x kilo epler er $p(x) = 25x$ kroner. Hvilke verdier av x gir mening?

Løsning

Vi kan ikke kjøpe et negativt antall kilo, så $x \geqslant 0$. Vi kan kjøpe 0 kg og hvilken som helst positiv mengde, så definisjonsmengden er $x \geqslant 0$.

■

5.1 Funksjonen er $f(x) = 3x - 2$. Regn ut

a) $f(0)$

b) $f(4)$

c) $f(-1)$

d) $f(10)$

5.2 Funksjonen er $g(x) = x^2 - 4$. Regn ut

a) $g(0)$

b) $g(3)$

c) $g(-2)$

d) $g(5)$

5.3 Viser tabellen en funksjon fra x til y?

a) x: $1, 2, 3$ og y: $2, 4, 6$

b) x: $0, 0, 1$ og y: $1, 2, 3$

c) x: $1, 2, 3$ og y: $5, 5, 5$

d) x: $1, 2, 1$ og y: $3, 4, 3$

5.4 Tabellen viser en lineær funksjon. Finn formelen.

a) x: $0, 1, 2, 3$ og $f(x)$: $5, 7, 9, 11$

b) x: $0, 1, 2$ og $f(x)$: $10, 7, 4$

5.5 Hvilke verdier av x gir mening?

a) x er antall kilo du kjøper.

b) x er antall måneder i ett år.

c) x er antall timer i et døgn.

5.6 Parkering koster 15 kr per time, og du kan parkere i høyst 4 timer. Prisen er $p(x) = 15x$ for $0 \leqslant x \leqslant 4$.

a) Hva koster 3 timer?

b) Hva er den høyeste prisen?

5.7 Hva betyr $f(5) = 12$?

5.8 Er det en funksjon fra klokkeslett til temperatur? Er det en funksjon fra temperatur til klokkeslett? Forklar.

5.9 Hvilket tall kan ikke settes inn i $f(x) = \dfrac{1}{x}$? Hvorfor?

5.10 Strømregningen er $f(x) = 49 + 1{,}2\,x$ kroner for x kWh. Hva er regningen for 100 kWh?

5.11 Ola regner ut $f(-3)$ for $f(x) = x^2 + 2$ som $-3^2 + 2 = -7$. Hva er galt? Hva er riktig svar?

5.12 Kari sier at $f(2) = 5$ betyr at $x = 5$. Hva er galt?

5.13 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return 2 * x + 1

print(f(3))
```

5.14 Hva blir utskriften?

Python

```
def g(x):
    return x**2

for x in range(-1, 2):
    print(x, g(x))
```

5.15 Funksjonen er $f(x) = 2x + 3$. Skriv $f(a + 2)$ så enkelt som mulig.

5.1.2 Lese grafer

EKSEMPEL *Lese av temperaturkurven*

Bruk temperaturkurven over. Hva er temperaturen klokka 8? Når er temperaturen 10 ° C?

Løsning

Klokka 8 er temperaturen $T(8) = 16$ ° C.

Temperaturen er 10 ° C to ganger: klokka 4 og klokka 20. Her har vi altså to x-verdier for samme y-verdi.

■

EKSEMPEL *Nullpunkter og toppunkt*

Se på grafen til $f(x) = -x^2 + 6x$ over. Finn nullpunktene og toppunktet, og si hvor grafen stiger og synker.

Løsning

Nullpunktene er $x = 0$ og $x = 6$. Toppunktet er $(3, 9)$, så maksimum er 9. Grafen stiger for $x < 3$ og synker for $x > 3$.

■

EKSEMPEL *Skjæringspunkter*

Les av skjæringspunktene mellom $f(x) = -x^2 + 6x$ og $g(x) = x + 4$ i figuren. Kontroller ved å sette inn.

Løsning

Grafene krysser i $(1, 5)$ og $(4, 8)$.

Kontroll: $f(1) = -1 + 6 = 5$ og $g(1) = 1 + 4 = 5$.
Videre $f(4) = -16 + 24 = 8$ og $g(4) = 4 + 4 = 8$.
Funksjonsverdiene er like i begge punkter.

■

5.16 Tabellen viser $f(x) = -x^2 + 6x$.

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	5	8	9	8	5	0

a) Hva er $f(2)$?

b) Hva er $f(5)$?

c) Hva er den største verdien?

d) For hvilken x er $f(x)$ størst?

5.17 Bruk tabellen over. Hva er nullpunktene til f?

5.18 Bruk tabellen over. For hvilke x er $f(x) = 5$?

5.19 Bruk tabellen over. For hvilke x stiger grafen, og for hvilke synker den?

5.20 Temperaturen i løpet av et døgn er gitt i tabellen.

Klokkeslett	0	4	8	12	16	20	24
Temperatur (° C)	0	10	16	18	16	10	0

a) Hva er temperaturen klokka 8?

b) Når er det varmest, og hva er temperaturen da?

c) Når er temperaturen 10 ° C?

5.21 Funksjonene er $f(x) = -x^2 + 6x$ og $g(x) = x + 4$. Vis at $(1, 5)$ og $(4, 8)$ er skjæringspunkter.

5.22 Tabellen viser $h(x)$.

x	−2	−1	0	1	2
h(x)	4	1	0	1	4

Hva er bunnpunktet?

5.23 Hvor mange nullpunkter har grafen til $y = 2x - 4$? Finn dem.

5.24 For hvilke x er $x^2 = 9$?

5.25 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 7):
    print(x, -x**2 + 6*x)
```

Hva er den største verdien i andre kolonne?

5.26 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(-2, 3):
    print(x, x**2)
```

5.27 Ola sier at toppunktet til $f(x) = -x^2 + 6x$ er 3. Hva er galt?

5.28 Funksjonen er $f(x) = -x^2 + 6x$ med maksimum 9. For hvor mange x er $f(x) = 10$?

5.29 Forklar forskjellen på et nullpunkt og et toppunkt.

5.2.1 Tegne grafer

EKSEMPEL *Finn nullpunkter og bunnpunkt*

Lag en verditabell for $f(x) = x^2 - 4x + 3$ for $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Hva er nullpunktene og bunnpunktet?

Løsning

x	0	1	2	3	4
f(x)	3	0	−1	0	3

Nullpunktene er $x = 1$ og $x = 3$. Bunnpunktet er $(2, -1)$, midt mellom nullpunktene.

■

5.30 Funksjonen er $f(x) = x^2$. Regn ut

a) $f(-3)$

b) $f(-1)$

c) $f(2)$

d) $f(4)$

5.31 Funksjonen er $g(x) = x^2 - 4$. Regn ut

a) $g(0)$

b) $g(2)$

c) $g(-3)$

d) $g(4)$

5.32 Funksjonen er $h(x) = -x^2 + 9$. Regn ut

a) $h(0)$

b) $h(3)$

c) $h(-2)$

d) $h(4)$

5.33 Lag en verditabell for $f(x) = x^2 - 2x$ for $x = -1, 0, 1, 2, 3$. Hva er nullpunktene og bunnpunktet?

5.34 Lag en verditabell for $f(x) = x^2 - 6x + 8$ for $x = 0, 1, ..., 6$. Hva er nullpunktene og bunnpunktet?

5.35 Funksjonen er $f(x) = x^2 - 1$. Ligger punktet på grafen?

a) $(2, 3)$

b) $(-3, 8)$

c) $(1, 1)$

5.36 Finn de heltallene x som gir $x^2 - 5x + 6 = 0$.

5.37 Per tegner grafen til $f(x) = x^2$ med rette linjer mellom punktene. Hva er galt?

5.38 Lise regner ut $f(-2)$ for $f(x) = x^2 - 1$ og får -5. Hva er riktig svar?

5.39 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(-2, 3):
    print(x, x**2 - 3)
```

5.40 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 5):
    print(x, x**2 - 4*x + 3)
```

5.41 Tabellen viser en funksjon.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	1	2

Hvilken formel passer: $x^2 + 1$, $x^2 - 2x + 2$ eller $2x + 1$?

5.42 Funksjonen er $f(x) = x^2 - 4x$. Regn ut $f(1)$ og $f(3)$. Hva sier det om grafen?

5.43 Forklar hvorfor vi trenger flere punkter for å tegne en krum graf enn for en rett linje.

5.3.1 Proporsjonale størrelser

EKSEMPEL *Epler*

Epler koster 25 kr per kilo. Hva koster 3 kg og 8 kg? Hva er k?

Løsning

Prisen er $y = 25x$, med $k = 25$ kr/kg. For 3 kg er prisen 75 kr, og for 8 kg er den 200 kr. ■

EKSEMPEL *Er tabellen proporsjonal?*

Er y proporsjonal med x?

a) x: $2, 4, 6$ og y: $10, 20, 30$

b) x: $1, 2, 3$ og y: $3, 5, 7$

Løsning

a) $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{20}{4} = 5$ og $\frac{30}{6} = 5$. Forholdet er alltid 5, så y er proporsjonal med x, med $k = 5$.

b) $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{5}{2} = 2{,}5$ og $\frac{7}{3} \approx 2{,}33$. Forholdet er ikke konstant, så y er ikke proporsjonal med x. (Verdiene følger $y = 2x + 1$, som er lineær, men har konstantledd.) ■

EKSEMPEL *Fart og strekning*

En bil kjører med konstant fart 80 km/h. Strekningen er $s = 80t$ kilometer etter t timer. Hva forteller 80? Hvor langt kommer bilen på 3,5 t, og hvor lang tid tar 400 km?

Løsning

Tallet 80 er proporsjonalitetskonstanten: farten i km/h. På 3,5 t kommer bilen $80 \cdot 3{,}5 = 280$ km. For 400 km løser vi $80t = 400$, som gir $t = 5$ t. ■

EKSEMPEL *Pannekaker*

Til 4 personer trengs 6 egg. Hvor mange egg trengs til 10 personer, hvis antall egg er proporsjonalt med antall personer?

Løsning

$k = \frac{6}{4} = 1{,}5$ egg per person. For 10 personer trengs $1{,}5 \cdot 10 = 15$ egg. ■

5.44 Er y proporsjonal med x?

a) x: $1, 2, 3$ og y: $5, 10, 15$

b) x: $2, 4, 6$ og y: $3, 6, 10$

c) x: $1, 3, 5$ og y: $2, 6, 10$

5.45 Finn k når $y = kx$ går gjennom punktet.

a) $(2, 14)$

b) $(5, 10)$

c) $(4, 2)$

5.46 Epler koster 30 kr per kilo.

a) Hva koster 4 kg?

b) Hva koster 2,5 kg?

c) Hvor mange kilo får du for 900 kr?

5.47 En bil kjører med 60 km/h, så strekningen er $s = 60t$.

a) Hvor langt kommer den på 2,5 t?

b) Hvor lang tid tar 300 km?

5.48 Timelønna er 200 kr.

a) Hva er lønna for 15 timer?

b) Hvor mange timer gir 7 000 kr?

5.49 Til 5 personer trengs 8 dl melk. Mengden er proporsjonal med antall personer. Hvor mye trengs til 20 personer?

5.50 En valuta koster 11 kr per enhet.

a) Hva koster 25 enheter?

b) Hvor mange enheter får du for 880 kr?

5.51 En bil bruker 0,6 liter per mil.

a) Hvor mye bruker den på 25 mil?

b) Hvor langt kommer den på 12 liter?

5.52 Ola sier at $y = 3x + 2$ viser at y er proporsjonal med x. Hva er galt?

5.53 Hvilken funksjon viser at y er proporsjonal med x: $y = 5x$, $y = 5x - 1$ eller $y = x^2$?

5.54 y er proporsjonal med x, og $y = 20$ når $x = 5$. Hva er y når $x = 8$?

5.55 Hvilket punkt ligger alltid på grafen til en proporsjonal sammenheng?

5.56 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(1, 5):
    print(x, 30 * x)
```

5.57 Hva blir utskriften?

Python

```
k = 12 / 4
print(k * 7)
```

5.58 Forklar hvorfor grafen til en proporsjonal sammenheng går gjennom origo.

5.4.1 Omvendt proporsjonale størrelser

EKSEMPEL *Malerne*

Tre malere bruker 8 timer. Anta at tiden er omvendt proporsjonal med antall malere. Hvor lang tid bruker 6 og 4 malere?

Løsning

$k = 3 \cdot 8 = 24$ arbeidstimer. Med 6 malere: $\frac{24}{6} = 4$ timer. Med 4 malere: $\frac{24}{4} = 6$ timer.

■

EKSEMPEL *Er tabellen omvendt proporsjonal?*

Er y omvendt proporsjonal med x?

a) x: $1, 2, 4$ og y: $12, 6, 3$

b) x: $1, 2, 3$ og y: $12, 8, 5$

Løsning

a) $1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 6 = 12$ og $4 \cdot 3 = 12$. Produktet er konstant, så størrelsene er omvendt proporsjonale, med $k = 12$.

b) $1 \cdot 12 = 12$, $2 \cdot 8 = 16$ og $3 \cdot 5 = 15$. Produktet er ikke konstant, så de er ikke omvendt proporsjonale.

■

EKSEMPEL *Verditabell for omvendt proporsjonalitet*

Lag en verditabell for $y = \frac{12}{x}$ for $x = 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

Løsning

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

Produktet $x \cdot y$ er 12 i alle kolonner.

■

EKSEMPEL *Hvilken type?*

Hva slags sammenheng er det?

a) Antall kilo epler og prisen

b) Antall personer som deler en regning på 600 kr og hva hver betaler

c) Fart og tid for en strekning på 100 km

Løsning

a) Dobbelt så mange kilo gir dobbelt så høy pris: proporsjonal.

b) Dobbelt så mange personer gir halvparten så mye per person: omvendt proporsjonal ($n \cdot b = 600$).

c) Dobbelt så høy fart gir halvparten så lang tid: omvendt proporsjonal ($v \cdot t = 100$).

■

5.59 Er y omvendt proporsjonal med x?

a) x: $1, 2, 3$ og y: $6, 3, 2$

b) x: $1, 2, 4$ og y: $5, 10, 20$

c) x: $2, 4, 8$ og y: $8, 4, 2$

5.60 Finn k når $x \cdot y = k$ og punktet er

a) $(3, 8)$

b) $(5, 6)$

c) $(10, 0{,}5)$

5.61 Funksjonen er $y = \frac{36}{x}$. Regn ut y når

a) $x = 4$

b) $x = 9$

c) $x = 12$

5.62 Fire malere bruker 12 timer på en jobb. Tiden er omvendt proporsjonal med antall malere.

a) Hvor lang tid bruker 6 malere?

b) Hvor mange malere trengs for å bli ferdig på 3 timer?

5.63 En strekning er 360 km.

a) Hvor lang tid tar den med 90 km/h?

b) Hvor lang tid tar den med 60 km/h?

c) Hvilken fart trengs for å bruke 2 t?

5.64 En regning på 840 kr deles likt mellom n personer. Hva betaler hver når $n = 6$ og $n = 7$?

5.65 Er sammenhengen proporsjonal eller omvendt proporsjonal?

a) Timer du jobber og lønn

b) Fart og tid for en gitt strekning

c) Antall kilo og pris per kilo, når du alltid bruker 300 kr

5.66 Ola sier at x og y er omvendt proporsjonale fordi y dobles når x dobles. Hva er galt?

5.67 Tre kraner fyller et basseng på 8 timer. Hvor lang tid tar det med 4 kraner?

5.68 y er omvendt proporsjonal med x, og $y = 5$ når $x = 6$. Hva er y når $x = 10$?

5.69 y er omvendt proporsjonal med x. Hva skjer med y når x halveres?

5.70 Lag en verditabell for $y = \frac{12}{x}$ med $x = 1, 2, 3, 4, 6, 12$.

5.71 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in [1, 2, 4, 8]:
    print(x, 16 / x)
```

5.72 Hva blir utskriften?

Python

```
k = 3 * 8
print(k / 6)
```

5.73 Forklar hvorfor $y = \frac{k}{x}$ aldri er 0 når $k \neq 0$.

5.5.1 Andregradsfunksjoner

EKSEMPEL *Verdier for en andregradsfunksjon*

Funksjonen er $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Regn ut $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ og $f(-1)$.

Løsning

$f(0) = 3$. $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. $f(4) = 16 - 16 + 3 = 3$. $f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$.

EKSEMPEL *Toppunktet ved symmetri*

Funksjonen $f(x) = -x^2 + 6x$ har nullpunkter $x = 0$ og $x = 6$. Finn toppunktet.

Løsning

$x = \frac{0+6}{2} = 3$ og $f(3) = -9 + 18 = 9$. Toppunktet er $(3, 9)$.

EKSEMPEL *Gjerdet*

Du har 40 m gjerde til en rektangulær hage. Arealet er $A(x) = x(20 - x)$, der x er den ene siden i meter. Hva blir størst mulig areal?

Løsning

Nullpunktene er $x = 0$ og $x = 20$, så toppunktet har $x = 10$. Da er $A(10) = 10 \cdot 10 = 100$. Det største mulige arealet er $100\ \text{m}^2$, og det får vi når hagen er en kvadrat på $10\ \text{m} \cdot 10\ \text{m}$.

EKSEMPEL *Ballen*

En ball kastes rett opp. Høyden er $h(t) = -5t^2 + 20t$ meter etter t sekunder. Når treffer ballen bakken igjen, og hvor høyt kommer den?

Løsning

$-5t^2 + 20t = -5t(t - 4) = 0$ gir $t = 0$ og $t = 4$. Ballen treffer bakken etter 4 sekunder. Toppunktet ligger ved $t = 2$, og $h(2) = -20 + 40 = 20$. Ballen kommer opp i 20 m.

5.74 Funksjonen er $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Regn ut

a) $f(0)$

b) $f(1)$

c) $f(3)$

d) $f(5)$

5.75 Har grafen et toppunkt eller et bunnpunkt?

a) $f(x) = 3x^2 + 1$

b) $g(x) = -2x^2 + 4$

c) $h(x) = x^2 - 5x$

5.76 Funksjonen er $f(x) = x(x - 6)$.

a) Hva er nullpunktene?

b) Hva er x-verdien til topp- eller bunnpunktet?

c) Hva er $f(3)$?

5.77 Finn x-verdien til topp- eller bunnpunktet når nullpunktene er

a) 2 og 8

b) -1 og 5

c) 0 og 10

5.78 Arealet av en hage er $A(x) = x(30 - x)$.

a) Hva er $A(10)$?

b) For hvilken x er arealet størst?

c) Hva er det største arealet?

5.79 En ball kastes opp, og høyden er $h(t) = -5t^2 + 30t$ meter. Når treffer den bakken, og hvor høyt kommer den?

5.80 Du har 40 m gjerde og lager en innhegning mot en vegg, så du trenger gjerde på tre sider. Arealet er $A(x) = x(40 - 2x)$. Hva er det største arealet?

5.81 Overskuddet er $P(x) = -x^2 + 8x - 12$. Nullpunktene er $x = 2$ og $x = 6$. For hvilken x er overskuddet størst, og hva er det største overskuddet?

5.82 Lise sier at grafen til $f(x) = -x^2 + 4$ har et bunnpunkt i $(0, 4)$. Hva er galt?

5.83 Ola sier at $(-4)^2 = -16$. Hva er riktig?

5.84 Finn heltallene x som gir $x^2 - 7x + 10 = 0$.

5.85 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 31, 10):
    print(x, x * (30 - x))
```

5.86 Hva blir utskriften?

Python

```
def f(x):
    return x**2 - 4*x + 3

print(f(2))
```

5.87 Gi et eksempel på en andregradsfunksjon uten nullpunkter.

5.88 Forklar hvorfor toppunktet ligger midt mellom nullpunktene.

5.5.2 Tredjegradsfunksjoner

EKSEMPEL *Verditabell for en tredjegradsfunksjon*

Lag en verditabell for $f(x) = x^3 - 3x$ for $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

Løsning

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

For eksempel er $f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) = -8 + 6 = -2$. Grafen har et toppunkt i $(-1, 2)$ og et bunnpunkt i $(1, -2)$.

■

EKSEMPEL *Den største esken*

Volumet av esken er $V(x) = x(20 - 2x)^2$ kubikkcentimeter. Hvilke x gir mening? Regn ut $V(1)$ til $V(5)$, og finn hvilken x som gir størst volum.

Løsning

Vi må ha $x > 0$ og $20 - 2x > 0$, altså $0 < x < 10$.

x	1	2	3	4	5
$V(x)$	324	512	588	576	500

Regnet for eksempel $V(3) = 3 \cdot 14^2 = 588$. Av disse heltallene gir $x = 3$ størst volum, 588 cm^3.

■

5.89 Funksjonen er $f(x) = x^3$. Regn ut

a) $f(3)$

b) $f(-3)$

c) $f(0)$

d) $f(-1)$

5.90 Funksjonen er $g(x) = x^3 - 4x$. Regn ut

a) $g(1)$

b) $g(2)$

c) $g(-2)$

d) $g(3)$

5.91 Hvilke av funksjonene er tredjegradsfunksjoner?

a) $x^3 - 2$

b) $x^2 - 2$

c) $2x - 2$

d) $2x^3 + x$

5.92 Lag en verditabell for $f(x) = x^3 - 3x$ for $x = -2, -1, 0, 1, 2$.

5.93 Volumet av en eske er $V(x) = x(20 - 2x)^2$. Regn ut

a) $V(1)$

b) $V(3)$

c) $V(4)$

d) Hvilken av $x = 1, 2, 3, 4, 5$ gir størst volum?

5.94 Hvilke verdier av x gir mening for esken $V(x) = x(20 - 2x)^2$?

5.95 En kube har side 5 m. Hva er volumet? Hva skjer med volumet når siden dobles?

5.96 Funksjonen er $f(x) = x(x - 2)(x + 3)$. Finn nullpunktene.

5.97 Per sier at x^3 alltid er positiv. Finn et eksempel som viser at det er feil.

5.98 Lise regner ut $V(2)$ for $V(x) = x(20 - 2x)^2$ som $(2 \cdot 16)^2 = 1\,024$. Hva er galt? Hva er riktig svar?

5.99 En eske lages av et kvadratisk ark på 30 cm · 30 cm, med volum $V(x) = x(30 - 2x)^2$. Regn ut $V(4)$, $V(5)$ og $V(6)$. Hvilken gir størst volum?

5.100 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(1, 6):
    print(x, x * (20 - 2*x)**2)
```

5.101 Hva blir utskriften?

Python

```
print((-2)**3)
print(2**3)
```

5.102 Hvor mange nullpunkter kan en tredjegradsfunksjon ha?

5.103 Forklar hvorfor volumet av esken er 0 både for $x = 0$ og $x = 10$.

5.6.1 Eksponentialfunksjoner

EKSEMPEL *Bakterier*

Antall bakterier er $f(x) = 100 \cdot 2^x$ etter x timer. Regn ut $f(0)$, $f(3)$ og $f(5)$.

Løsning

$f(0) = 100 \cdot 2^0 = 100$. $f(3) = 100 \cdot 2^3 = 800$. $f(5) = 100 \cdot 2^5 = 3\,200$.

■

EKSEMPEL *Rente og verdifall*

a) 10 000 kr med 3 % rente per år: Beløpet etter x år er $f(x) = 10\,000 \cdot 1{,}03^x$. Hva er det etter 5 år?

b) En bil er verdt 300 000 kr og taper 12 % per år: $g(x) = 300\,000 \cdot 0{,}88^x$. Hva er verdien etter 3 år?

Løsning

a) $f(5) = 10\,000 \cdot 1{,}03^5 \approx 11\,593$ kr.

b) $g(3) = 300\,000 \cdot 0{,}88^3 \approx 204\,442$ kr.

■

EKSEMPEL *Tolke vekstfaktoren*

Hva forteller $f(x) = 50 \cdot 1{,}2^x$ og $g(x) = 80 \cdot 0{,}75^x$?

Løsning

f har startverdi 50 og vekstfaktor 1,2: Verdien vokser med 20 % for hver enhet x. g har startverdi 80 og vekstfaktor 0,75: Verdien synker med 25 % for hver enhet x.

■

EKSEMPEL *Fra to verdier*

a) Du har 5 000 kr i dag, og 5 250 kr om ett år. Hva er $f(x)$ hvis beløpet vokser eksponentielt?

b) En bakteriekultur har 100 bakterier ved start og 400 etter 2 timer. Hva er vekstfaktoren per time?

Løsning

a) $b = \frac{5\,250}{5\,000} = 1{,}05$, så $f(x) = 5\,000 \cdot 1{,}05^x$. Det er 5 % vekst per år.

b) $100 \cdot b^2 = 400$ gir $b^2 = 4$, så $b = 2$. Antallet dobles hver time, og $f(x) = 100 \cdot 2^x$.

■

5.104 Funksjonen er $f(x) = 50 \cdot 2^x$. Regn ut

a) $f(0)$

b) $f(2)$

c) $f(4)$

5.105 Funksjonen er $g(x) = 200 \cdot 3^x$. Regn ut

a) $g(1)$

b) $g(2)$

c) $g(3)$

5.106 Vokser eller avtar funksjonen?

a) $80 \cdot 1{,}1^x$

b) $80 \cdot 0{,}95^x$

c) $5 \cdot 1{,}5^x$

d) $100 \cdot 0{,}5^x$

5.107 Finn vekstfaktoren.

a) 12 % vekst

b) 20 % nedgang

c) 150 % vekst

d) 6 % nedgang

5.108 Hvor mange prosent endrer verdien seg per enhet?

a) $b = 1{,}07$

b) $b = 0{,}9$

c) $b = 1{,}5$

5.109 Beløpet er $f(x) = 4\,000 \cdot 1{,}05^x$ etter x år. Hva er beløpet etter 2 år og 3 år?

5.110 En maskin er verdt 80 000 kr og taper 10 % per år, så verdien er $g(x) = 80\,000 \cdot 0{,}9^x$. Hva er verdien etter 2 og 3 år?

5.111 Du har 2 000 kr i dag og 2 100 kr om ett år. Skriv funksjonen $f(x) = a \cdot b^x$ for beløpet etter x år.

5.112 En bakteriekultur har 50 bakterier ved start og 200 etter 2 timer. Hva er vekstfaktoren, og hvor mange er det etter 3 timer?

5.113 Er veksten lineær eller eksponentiell?

a) $3, 6, 12, 24$

b) $3, 7, 11, 15$

5.114 Kari bruker 0,05 som vekstfaktor for 5 % vekst. Hva er galt?

5.115 Ola regner ut $100 \cdot 2^3$ som 200^3. Hva er galt? Hva er riktig svar?

5.116 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 5):
    print(x, 10 * 3**x)
```

5.117 Hva blir utskriften?

Python

```
belop = 1000
for ar in range(3):
    belop = belop * 1.1
    print(round(belop))
```

5.118 En mengde på 160 g halveres hver time. Hvor mye er igjen etter 4 timer?

5.119 Forklar forskjellen på lineær og eksponentiell vekst.

Fasit

5.1.1 Funksjonsbegrepet

5.1
a) -2
b) 10
c) -5
d) 28

5.2
a) -4
b) 5
c) 0
d) 21

5.3
a) Ja
b) Nei, $x = 0$ gir både 1 og 2.
c) Ja
d) Ja, $x = 1$ gir 3 begge gangene.

5.4
a) $f(x) = 2x + 5$
b) $f(x) = -3x + 10$

5.5
a) $x \geqslant 0$
b) $0 \leqslant x \leqslant 12$
c) $0 \leqslant x \leqslant 24$

5.6
a) 45 kr
b) $15 \cdot 4 = 60$ kr

5.7
Når $x = 5$, er funksjonsverdien 12.

5.8
Fra klokkeslett til temperatur er det en funksjon, fordi hvert klokkeslett har én temperatur. Fra temperatur til klokkeslett er det ikke en funksjon, fordi samme temperatur kan oppstå på flere klokkeslett.

5.9
$x = 0$, fordi vi ikke kan dele på 0.

5.10
$f(100) = 49 + 120 = 169$ kr

5.11
Han glemte parentesen. $f(-3) = (-3)^2 + 2 = 9 + 2 = 11$.

5.12
Tallet i parentesen er x-verdien. $f(2) = 5$ betyr at $x = 2$ gir verdien 5.

5.13
7

5.14
```
-1 1
0 0
1 1
```

5.15
$2(a + 2) + 3 = 2a + 4 + 3 = 2a + 7$

5.1.2 Lese grafer

5.16
a) 8
b) 5
c) 9
d) $x = 3$

5.17
$f(0) = 0$ og $f(6) = 0$, så nullpunktene er $x = 0$ og $x = 6$.

5.18
$x = 1$ og $x = 5$

5.19
Grafen stiger for $x < 3$ og synker for $x > 3$, med toppunkt i $(3, 9)$.

5.20
a) 16 ° C
b) Klokka 12, med 18 ° C
c) Klokka 4 og klokka 20

5.21
$f(1) = 5 = g(1)$ og $f(4) = -16 + 24 = 8 = g(4)$. Funksjonsverdiene er like i begge punktene.

5.22
Den laveste verdien er 0 ved $x = 0$, så bunnpunktet er $(0, 0)$.

5.23
Ett: $2x - 4 = 0$ gir $x = 2$.

5.24
$x = 3$ og $x = -3$

5.25
```
0 0
1 5
2 8
3 9
4 8
5 5
6 0
```
Den største verdien er 9.

5.26
```
-2 4
-1 1
0 0
1 1
2 4
```
Nullpunktet er $x = 0$.

5.27
Toppunktet er et punkt, $(3, 9)$. Tallet 3 er x-verdien, og maksimum er 9.

5.28
Null. Funksjonen er aldri større enn 9.

5.29
Et nullpunkt er en x-verdi der $f(x) = 0$. Et toppunkt er det høyeste punktet, der grafen går fra å stige til å synke.

5.2.1 Tegne grafer

5.30
a) 9
b) 1
c) 4
d) 16

5.31
a) -4
b) 0
c) 5
d) 12

5.32
a) 9
b) 0
c) 5
d) -7

5.33
Verdiene er $3, 0, -1, 0, 3$. Nullpunktene er $x = 0$ og $x = 2$, og bunnpunktet er $(1, -1)$.

5.34
Verdiene er $8, 3, 0, -1, 0, 3, 8$.
Nullpunktene er $x = 2$ og $x = 4$, og bunnpunktet er $(3, -1)$.

5.35
a) Ja, $f(2) = 3$.
b) Ja, $f(-3) = 8$.
c) Nei, $f(1) = 0$.

5.36
$x = 2$ gir $4 - 10 + 6 = 0$, og $x = 3$ gir $9 - 15 + 6 = 0$.

5.37
Grafen er en jevn kurve (parabel). Vi trenger flere punkter for å se hvordan den bøyer.

5.38
$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

5.39
```
-2 1
-1 -2
0 -3
1 -2
2 1
```

5.40
```
0 3
1 0
2 -1
3 0
4 3
```

5.41
$x^2 - 2x + 2$. Kontroll: $f(-1) = 1 + 2 + 2 = 5$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ og $f(2) = 2$.

5.42
$f(1) = -3$ og $f(3) = 9 - 12 = -3$.
Grafen er symmetrisk om $x = 2$, midt mellom 1 og 3.

5.43
En rett linje har samme retning hele veien, så to punkter holder. En krum graf endrer retning, så vi trenger flere punkter for å se formen og hvor den snur.

5.3.1 Proporsjonale størrelser

5.44
a) Ja, $k = 5$.
b) Nei, $\frac{3}{2} = 1{,}5$, men $\frac{10}{6} \approx 1{,}67$.
c) Ja, $k = 2$.

5.45
a) 7
b) 2
c) 0,5

5.46
a) 120 kr
b) 75 kr
c) 30 kg

5.47
a) 150 km
b) 5 t

5.48
a) 3 000 kr
b) 35 timer

5.49
20 personer er fire ganger så mange, så det trengs $4 \cdot 8 = 32$ dl.

5.50
a) 275 kr
b) 80 enheter

5.51
a) 15 L
b) $\frac{12}{0{,}6} = 20$ mil

5.52
Det er et konstantledd. Grafen går ikke gjennom origo, og $\frac{y}{x}$ er ikke konstant.

5.53
$y = 5x$

5.54
$k = \frac{20}{5} = 4$, så $y = 4 \cdot 8 = 32$.

5.55
Origo, $(0, 0)$, fordi $y = k \cdot 0 = 0$.

5.56
```
1 30
2 60
3 90
4 120
```

5.57
`21.0`, fordi $k = 3$.

5.58
$y = kx$ gir $y = 0$ for $x = 0$. Null kilo koster null kroner.

5.4.1 Omvendt proporsjonale størrelser

5.59
a) Ja, $x \cdot y = 6$.
b) Nei, her er y proporsjonal med x.
c) Ja, $x \cdot y = 16$.

5.60
a) 24
b) 30
c) 5

5.61
a) 9
b) 4
c) 3

5.62
$k = 48$ arbeidstimer.
a) $\frac{48}{6} = 8$ t
b) $\frac{48}{3} = 16$ malere

5.63
a) 4 t
b) 6 t
c) 180 km/h

5.64
$n = 6$: 140 kr. $n = 7$: 120 kr.

5.65
a) Proporsjonal
b) Omvendt proporsjonal
c) Omvendt proporsjonal (kilo · pris per kilo = 300)

5.66
Det er proporsjonalitet. Ved omvendt proporsjonalitet halveres y når x dobles.

5.67
$3 \cdot 8 = 24$ krantimer, så med 4 kraner tar det $\frac{24}{4} = 6$ t.

5.68
$k = 30$, så $y = \frac{30}{10} = 3$.

5.69
y dobles.

5.70
Verdiene er $12, 6, 4, 3, 2, 1$.

5.71
```
1 16.0
2 8.0
4 4.0
8 2.0
```

5.72
`4.0`

5.73
En brøk er bare 0 hvis telleren er 0. Siden $k \neq 0$, kan y aldri bli 0.

5.5.1 Andregradsfunksjoner

5.74
a) 3
b) 0
c) 0
d) 8

5.75
a) Bunnpunkt ($a = 3 > 0$)
b) Toppunkt ($a = -2 < 0$)
c) Bunnpunkt ($a = 1 > 0$)

5.76
a) $x = 0$ og $x = 6$
b) $x = 3$
c) $3 \cdot (-3) = -9$

5.77
a) 5
b) 2
c) 5

5.78
a) 200
b) $x = 15$
c) $15 \cdot 15 = 225$

5.79
$-5t(t - 6) = 0$ gir $t = 0$ og $t = 6$.
Toppunktet ligger ved $t = 3$, og $h(3) = -45 + 90 = 45$ m.

5.80
Nullpunktene er 0 og 20, så toppunktet har $x = 10$. $A(10) = 10 \cdot 20 = 200$ m^2.

5.81
$x = \frac{2 + 6}{2} = 4$, og $P(4) = -16 + 32 - 12 = 4$.

5.82
Siden $a = -1 < 0$, åpner parabelen nedover, og $(0, 4)$ er et toppunkt.

5.83
$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

5.84
$x = 2$ og $x = 5$. Kontroll: $4 - 14 + 10 = 0$ og $25 - 35 + 10 = 0$.

5.85
```
0 0
10 200
20 200
30 0
```

5.86
`-1`

5.87
For eksempel $f(x) = x^2 + 1$. Siden $x^2 \geqslant 0$, er $f(x) \geqslant 1$, så $f(x)$ er aldri 0.

5.88
Parabelen er symmetrisk om en loddrett linje gjennom toppunktet. Nullpunktene har samme funksjonsverdi, 0, så de ligger like langt fra symmetrilinja.

5.5.2 Tredjegradsfunksjoner

5.89
a) 27
b) -27
c) 0
d) -1

5.90
a) -3
b) 0
c) 0
d) $27 - 12 = 15$

5.91
a) Ja
b) Nei, andregrad
c) Nei, lineær
d) Ja

5.92
Verdiene er $-2, 2, 0, -2, 2$.

5.93
a) 324
b) 588
c) 576
d) $x = 3$

5.94
$0 < x < 10$, siden $20 - 2x$ må være positiv.

5.95
$5^3 = 125\ \text{m}^3$. Når siden dobles, blir volumet $2^3 = 8$ ganger så stort.

5.96
$x = 0$, $x = 2$ og $x = -3$.

5.97
$(-2)^3 = -8$

5.98
Potensen gjelder bare parentesen: $V(2) = 2 \cdot 16^2 = 2 \cdot 256 = 512$.

5.99
$V(4) = 4 \cdot 22^2 = 1\,936$, $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2\,000$ og $V(6) = 6 \cdot 18^2 = 1\,944$. $x = 5$ gir størst volum.

5.100

```
1 324
2 512
3 588
4 576
5 500
```

5.101
-8 og 8

5.102
Én, to eller tre. For eksempel har $x^3 - 3x$ tre nullpunkter, mens $x^3 + 1$ har ett.

5.103
For $x = 0$ er høyden 0. For $x = 10$ er grunnflatens side $20 - 20 = 0$.

5.6.1 Eksponentialfunksjoner

5.104
a) 50
b) 200
c) 800

5.105
a) 600
b) 1 800
c) 5 400

5.106
a) Vokser
b) Avtar
c) Vokser
d) Avtar

5.107
a) 1,12
b) 0,80
c) 2,5
d) 0,94

5.108
a) 7 % vekst
b) 10 % nedgang
c) 50 % vekst

5.109
$f(2) = 4\,000 \cdot 1{,}1025 = 4\,410$ kr. $f(3) = 4\,410 \cdot 1{,}05 = 4\,630{,}50$ kr.

5.110
$g(2) = 80\,000 \cdot 0{,}81 = 64\,800$ kr. $g(3) = 64\,800 \cdot 0{,}9 = 58\,320$ kr.

5.111
$a = 2\,000$ og $b = \dfrac{2\,100}{2\,000} = 1{,}05$, så $f(x) = 2\,000 \cdot 1{,}05^x$.

5.112
$50 \cdot b^2 = 200$ gir $b = 2$. Etter 3 timer: $50 \cdot 2^3 = 400$.

5.113
a) Eksponentiell, vekstfaktor 2.
b) Lineær, øker med 4 hver gang.

5.114
Vekstfaktoren tar med det opprinnelige: $1 + 0{,}05 = 1{,}05$.

5.115
Bare 2 opphøyes i 3. $100 \cdot 2^3 = 100 \cdot 8 = 800$.

5.116

```
0 10
1 30
2 90
3 270
4 810
```

5.117

```
1100
1210
1331
```

5.118
$160 \cdot 0{,}5^4 = 160 \cdot \dfrac{1}{16} = 10$ g

5.119
Ved lineær vekst legger vi til det samme for hver enhet x. Ved eksponentiell vekst ganger vi med den samme faktoren, så økningen blir stadig større.