2 Lineære funksjoner og modeller

Overskriftene viser til delkapitlene i boka. Først kommer et formelark for hele kapittelet. Under hver overskrift står gjennomregnede eksempler med løsning, og deretter oppgaver du skal løse uten PC. Regn uten kalkulator der tallene er enkle. Fasiten står bakerst.

Formelark

STIGNINGSTALL OG KONSTANTLEDD

Lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

Konstantledd (startverdi)

$$f(0) = b$$

- $a > 0$: funksjonen øker. $a < 0$: den minker. $a = 0$: den er konstant.
- Tolk a og b med enhet.

TEGNE GRAFER OG FINNE FUNKSJONSUTTRYKKET

Skjæring med y-aksen

$$(0, b)$$

Skjæring med x-aksen

$$ax + b = 0$$

Stigningstall fra to punkter

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Konstantledd

$$b = y_1 - ax_1$$

- Sett ett punkt inn i $y = ax + b$ for å finne b, og kontroller med det andre punktet.
- Er $a < 0$, går grafen ned når du går til høyre.

SKJÆRINGSPUNKTER OG TILBUD

Skjæringspunkt

$$f(x) = g(x)$$

Tilbud

$$\text{pris} = \text{pris per enhet} \cdot x + \text{fast pris}$$

- Løs $f(x) = g(x)$ for x, og sett x inn for å finne y.
- Prøv en verdi på hver side av skjæringspunktet for å se hvilket tilbud som er billigst.
- Skriv hva svaret avhenger av.

LINEÆRE MODELLER

Avvik

$$\text{målt} - \text{modell}$$

- Interpolasjon er trygt, ekstrapolasjon er usikkert.
- Oppgi gyldighetsområdet, og vurder om svarene er rimelige.

2.1.1 Stigningstall og konstantledd

EKSEMPEL *Funksjonsverdier*

Treningssenteret har funksjonen $f(x) = 150x + 300$, der x er antall måneder og $f(x)$ er beløpet i kroner. Regn ut

a) $f(0)$

b) $f(10)$

c) Etter hvor mange måneder har du betalt 1 050 kr?

Løsning

a) $f(0) = 150 \cdot 0 + 300 = 300$. Du betaler 300 kr i innmelding før noen måneder har gått.

b) $f(10) = 150 \cdot 10 + 300 = 1\,800$. Etter 10 måneder har du betalt 1 800 kr.

c) Vi løser $150x + 300 = 1\,050$. Det gir $150x = 750$, så $x = 5$. Du har betalt 1 050 kr etter 5 måneder.

EKSEMPEL *Tolke stigningstall og konstantledd*

Du leier en kajakk. Prisen er $f(x) = 40x + 120$ kroner for x timer. Hva forteller tallene 40 og 120?

Løsning

Stigningstallet er $a = 40$: Prisen øker med 40 kr for hver time du leier kajakken.

Konstantleddet er $b = 120$: Det er prisen for 0 timer, altså en fast avgift på 120 kr som du betaler uansett hvor lenge du leier.

EKSEMPEL *En synkende funksjon*

En vanntank inneholder 200 liter. Den tappes med 8 liter i minuttet. Sett opp en funksjon for hvor mange liter det er i tanken etter x minutter. Hvor mange liter er det igjen etter 10 minutter, og når er tanken tom?

Løsning

Startverdien er $b = 200$, og mengden synker med 8 liter i minuttet, så $a = -8$:

$$f(x) = -8x + 200.$$

Etter 10 minutter er $f(10) = -8 \cdot 10 + 200 = 120$ liter igjen. Tanken er tom når $f(x) = 0$: $-8x + 200 = 0$ gir $x = 25$. Tanken er tom etter 25 minutter.

EKSEMPEL *Fra tekst til funksjon*

En taxi koster 60 kr i startpris og 20 kr for hver kilometer. Sett opp en funksjon for prisen for x kilometer. Hva koster en tur på 12 km?

Løsning

Startprisen er konstantleddet, $b = 60$, og 20 kr per kilometer er stigningstallet, $a = 20$:

$$f(x) = 20x + 60.$$

En tur på 12 km koster $f(12) = 20 \cdot 12 + 60 = 300$ kr.

2.1 Funksjonen er $f(x) = 2x + 5$. Regn ut

a) $f(0)$

b) $f(3)$

c) $f(-1)$

d) $f(10)$

2.2 Funksjonen er $g(x) = 4x - 3$. Regn ut

a) $g(1)$

b) $g(5)$

c) $g(-2)$

d) $g(0)$

2.3 Finn stigningstallet a og konstantleddet b.

a) $f(x) = 3x + 7$

b) $f(x) = -2x + 5$

c) $f(x) = x - 4$

d) $f(x) = 6$

2.4 Avgjør om funksjonen øker, minker eller er konstant.

a) $f(x) = 5x - 2$

b) $g(x) = -x + 9$

c) $h(x) = 12$

d) $k(x) = 0{,}5\,x + 1$

2.5 Et treningssenter tar 300 kr i innmelding og 150 kr i måneden. Etter x måneder har du betalt $f(x) = 150x + 300$ kroner.

a) Hva har du betalt etter 6 måneder?

b) Etter hvor mange måneder har du betalt 1 800 kr?

2.6 En taxi koster 60 kr i startpris og 20 kr per kilometer.

a) Skriv en funksjon for prisen for x kilometer.

b) Hva koster en tur på 15 km?

c) Hva forteller tallet 20?

2.7 Prisen for å leie en kajakk er $f(x) = 40x + 120$ kroner for x timer.

a) Hva koster det å leie i 5 timer?

b) Hva forteller tallet 120?

2.8 En tank inneholder 600 liter og tappes med 15 liter i minuttet.

a) Skriv en funksjon for mengden etter x minutter.

b) Hvor mange liter er igjen etter 10 minutter?

c) Etter hvor mange minutter er tanken tom?

2.9 Du har 1 500 kr og sparer 200 kr i måneden.

a) Skriv en funksjon for sparebeløpet etter x måneder.

b) Hva har du etter 12 måneder?

c) Etter hvor mange måneder har du 5 500 kr?

2.10 En sykkel koster 8 000 kr ny og faller 800 kr i verdi hvert år. Verdien etter x år er $g(x) = -800x + 8\,000$.

a) Hva er verdien etter 5 år?

b) Etter hvor mange år er verdien 0?

2.11 Mia regner ut $f(4)$ for $f(x) = 5x + 2$ slik: $f(4) = (5 + 2) \cdot 4 = 28$. Hva er galt? Hva er riktig svar?

2.12 Per sier at stigningstallet i $g(x) = 8 - 3x$ er 8. Hva er galt? Hva er stigningstallet og konstantleddet?

2.13 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 4):
    print(x, 3 * x + 2)
```

2.14 Tabellen viser verdier av en lineær funksjon f.

x	1	2	3
$f(x)$	5	8	11

Finn funksjonsuttrykket.

2.15 En lineær funksjon f har $f(0) = 6$ og $f(1) = 9$. Finn $f(x)$.

2.16 Forklar hvorfor $f(0) = b$ for en lineær funksjon $f(x) = ax + b$.

2.2.1 Tegne lineære grafer

EKSEMPEL *Ligger punktet på grafen?*

Funksjonen er $f(x) = 3x - 2$. Ligger punktene $(4, 10)$ og $(2, 5)$ på grafen?

Løsning

$f(4) = 3 \cdot 4 - 2 = 10$. Det stemmer med $y = 10$, så $(4, 10)$ ligger på grafen.

$f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, men y-verdien er 5. Punktet $(2, 5)$ ligger ikke på grafen. ■

EKSEMPEL *Skjæring med aksene*

Finn hvor grafen til $f(x) = 3x - 12$ skjærer aksene.

Løsning

Grafen skjærer y-aksen i $(0, b) = (0, -12)$.

Grafen skjærer x-aksen der $f(x) = 0$. Vi løser likningen $3x - 12 = 0$, som gir $3x = 12$ og $x = 4$. Grafen skjærer x-aksen i $(4, 0)$. ■

2.17 Lag en verditabell for $f(x) = x + 4$ med $x = 0, 1, 2, 3$.

2.18 Lag en verditabell for $g(x) = 2x - 1$ med $x = -1, 0, 1, 2$.

2.19 I hvilket punkt skjærer grafen y-aksen?

a) $f(x) = 3x + 5$

b) $f(x) = -2x + 8$

c) $f(x) = x - 6$

d) $f(x) = 4x$

2.20 Funksjonen er $f(x) = 3x - 2$. Ligger punktet på grafen?

a) $(2, 4)$

b) $(5, 12)$

c) $(-1, -5)$

d) $(0, -2)$

2.21 Grafen til f går gjennom $(0, 2)$, og for hvert steg 1 til høyre går den 3 opp.

a) Hva er $f(4)$?

b) Skriv funksjonsuttrykket.

2.22 Grafen til g går gjennom $(0, 10)$, og for hvert steg 1 til høyre går den 2 ned.

a) Hva er y-koordinaten ved $x = 3$?

b) Skriv funksjonsuttrykket.

c) Hvor skjærer grafen x-aksen?

2.23 Finn x-koordinaten der grafen skjærer x-aksen.

a) $f(x) = 2x - 6$

b) $f(x) = -x + 5$

c) $f(x) = 4x + 8$

d) $f(x) = 5x - 10$

2.24 Hvilken graf stiger raskest: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 5x - 3$ eller $h(x) = -x + 8$?

2.25 Finn punktene på grafen til $f(x) = -x + 3$ for $x = 0, 1, 2, 3$.

2.26 Finn hvor grafen til $f(x) = 2x - 8$ skjærer aksene.

2.27 Per skal tegne grafen til $g(x) = 3x - 2$ og starter i $(0, 2)$. Hva er galt? Hvor skal han starte?

2.28 Lise sier at grafen til $f(x) = 2x + 6$ skjærer x-aksen i $x = 6$. Hva er galt? Hva er riktig svar?

2.29 Grafen til $f(x) = -x + 6$ skjærer aksene i punktene A og B. Hva er arealet av trekanten mellom A, B og origo?

2.30 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 4):
    print(x, 2 * x - 5)
```

2.31 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 6):
    y = -3 * x + 9
    if y == 0:
        print(x)
```

2.32 Punktene $(0, 2)$, $(3, 8)$ og $(5, k)$ ligger på en rett linje. Hva er k?

2.33 Forklar hvordan du kan tegne grafen til $f(x) = -2x + 6$ uten verditabell.

2.2.2 Finne funksjonsuttrykket

EKSEMPEL *Fra to punkter*

Finn funksjonsuttrykket til linja gjennom $(1, 5)$ og $(4, 11)$.

Løsning

Stigningstallet er

$$a = \frac{11 - 5}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Så er $f(x) = 2x + b$. Punktet $(1, 5)$ gir $2 \cdot 1 + b = 5$, så $b = 3$. Funksjonen er $f(x) = 2x + 3$.

Kontroll: $f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$. Det stemmer med det andre punktet. ∎

EKSEMPEL *En synkende linje*

Finn funksjonsuttrykket til linja gjennom $(0, 10)$ og $(5, 0)$.

Løsning

Punktet $(0, 10)$ ligger på y-aksen, så $b = 10$.

Stigningstallet er

$$a = \frac{0 - 10}{5 - 0} = \frac{-10}{5} = -2.$$

Funksjonen er $f(x) = -2x + 10$. Kontroll: $f(5) = -2 \cdot 5 + 10 = 0$. ∎

EKSEMPEL *Fra tekst*

Et oljefat inneholdt 500 liter etter 2 timer og 380 liter etter 6 timer. Anta at olje tappes jevnt. Finn en funksjon for hvor mange liter det er igjen etter x timer, og tolk tallene.

Løsning

Stigningstallet er

$$a = \frac{380 - 500}{6 - 2} = \frac{-120}{4} = -30.$$

Så er $f(x) = -30x + b$. Punktet $(2, 500)$ gir $-30 \cdot 2 + b = 500$, så $b = 560$. Funksjonen er $f(x) = -30x + 560$.

Tolkning: Det tappes 30 liter per time, og fatet inneholdt 560 liter til å begynne med. Kontroll: $f(6) = -30 \cdot 6 + 560 = 380$. ∎

2.34 Finn stigningstallet til linja gjennom punktene.

a) $(0, 1)$ og $(2, 5)$

b) $(1, 2)$ og $(4, 11)$

c) $(0, 8)$ og $(4, 0)$

d) $(-2, 1)$ og $(2, 9)$

2.35 Finn konstantleddet b når grafen går gjennom punktet.

a) $f(x) = 3x + b$ gjennom $(2, 10)$

b) $f(x) = -2x + b$ gjennom $(1, 3)$

c) $f(x) = x + b$ gjennom $(4, 1)$

2.36 Finn funksjonsuttrykket til linja gjennom punktene.

a) $(0, 3)$ og $(2, 7)$

b) $(1, 2)$ og $(3, 8)$

c) $(0, 5)$ og $(5, 0)$

d) $(2, 3)$ og $(4, -1)$

2.37 Tabellen viser verdier av en lineær funksjon.

x	1	2	3
$f(x)$	5	8	11

Finn $f(x)$ og $f(10)$.

2.38 En taxi kostet 140 kr for 4 km og 260 kr for 10 km.

a) Hva er prisen per kilometer?

b) Hva er startprisen?

c) Skriv funksjonsuttrykket.

2.39 Et abonnement kostet 180 kr etter 2 måneder og 330 kr etter 5 måneder. Prisen øker jevnt.

a) Hva koster det per måned?

b) Skriv funksjonsuttrykket for prisen etter x måneder.

2.40 Temperaturen var 5 ° C klokka 0 og 17 ° C klokka 4. Anta jevn stigning.

a) Hvor mange grader stiger det per time?

b) Hva er temperaturen klokka 10?

2.41 En tank inneholdt 400 liter etter 1 time og 250 liter etter 4 timer. Anta jevn tapping.

a) Finn funksjonsuttrykket.

b) Etter hvor mange timer er tanken tom?

2.42 Ola finner stigningstallet til linja gjennom $(2,4)$ og $(6,12)$ slik: $\frac{6-2}{12-4}=\frac{1}{2}$. Hva er galt? Hva er riktig svar?

2.43 Lise finner at linja gjennom $(1,5)$ og $(3,9)$ har $a=2$, og hun skriver $b=5$. Hva er galt? Hva er riktig b?

2.44 Ligger de tre punktene på en rett linje?

a) $(0,1)$, $(2,5)$ og $(4,9)$

b) $(1,2)$, $(3,8)$ og $(5,12)$

2.45 Linja gjennom $(2,5)$ og $(6,13)$ skjærer y-aksen. Hvor?

2.46 Hva blir utskriften?

Python

```
x1, y1 = 1, 4
x2, y2 = 3, 10
a = (y2 - y1) / (x2 - x1)
b = y1 - a * x1
print(a, b)
```

2.47 Hva blir utskriften?

Python

```
x1, y1 = 0, 6
x2, y2 = 3, 0
a = (y2 - y1) / (x2 - x1)
b = y1 - a * x1
print(a, b)
```

2.48 En elektriker tar 750 kr for 3 timer og 1 350 kr for 7 timer. Prisen er lineær. Hva er fast avgift, og hva er timeprisen?

2.49 Forklar hvorfor det holder med to punkter for å finne funksjonsuttrykket til en lineær funksjon.

2.3.1 Skjæringspunkt mellom grafer

EKSEMPEL *Skjæringspunktet mellom to linjer*

Finn skjæringspunktet mellom grafene til $f(x)=2x+1$ og $g(x)=-x+7$.

Løsning

$$\begin{aligned}2x+1&=-x+7\\3x&=6\\x&=2.\end{aligned}$$

Så er $y=f(2)=2\cdot 2+1=5$. Skjæringspunktet er $(2,5)$. Kontroll: $g(2)=-2+7=5$. ∎

EKSEMPEL *Pia og Jonas*

Finn ut når Pia og Jonas har like mye, og hvor mye de da har.

Løsning

$$\begin{aligned}200x+1\,000&=300x+400\\600&=100x\\x&=6.\end{aligned}$$

Etter 6 måneder har de like mye. Da har de $f(6)=200\cdot 6+1\,000=2\,200$ kr hver. Kontroll: $g(6)=300\cdot 6+400=2\,200$. ∎

EKSEMPEL *Hvem har mest?*

Hvem har mest etter 3 måneder, og hvem etter 10 måneder?

Løsning

Etter 3 måneder: $f(3)=1\,600$ og $g(3)=1\,300$. Pia har mest.

Etter 10 måneder: $f(10)=3\,000$ og $g(10)=3\,400$. Jonas har mest.

Det passer med skjæringspunktet: Pia ligger over før $x=6$, og Jonas ligger over etter. ∎

2.50 For hvilken x er $f(x)=g(x)$?

a) $f(x)=2x+1$ og $g(x)=x+5$

b) $f(x)=3x-4$ og $g(x)=x+6$

c) $f(x)=5x$ og $g(x)=2x+12$

d) $f(x)=-x+9$ og $g(x)=2x$

2.51 Finn skjæringspunktet mellom grafene til $f(x)=x+2$ og $g(x)=-x+8$.

2.52 Finn skjæringspunktet mellom grafene til $f(x)=2x-3$ og $g(x)=x+1$.

2.53 Funksjonene er $f(x)=3x+1$ og $g(x)=2x+3$. Er punktet skjæringspunktet?

a) $(2,7)$

b) $(1,4)$

2.54 Ida har 500 kr og sparer 100 kr i måneden. Kari har 100 kr og sparer 200 kr i måneden.

a) Skriv en funksjon for hver.

b) Etter hvor mange måneder har de like mye?

c) Hvor mye har de da?

2.55 Bruk Ida og Kari fra forrige oppgave. Hvem har mest etter 2 måneder? Etter 6 måneder?

2.56 Funksjonene er $f(x)=3x+2$ og $g(x)=3x-4$. Hvor mange skjæringspunkter har grafene? Forklar.

2.57 Funksjonene er $f(x) = 2x + 1$ og $g(x) = 2x + 1$. Hvor mange skjæringspunkter har grafene?

2.58 Funksjonen er $f(x) = 2x - 6$. Finn hvor grafen skjærer y-aksen og x-aksen.

2.59 Lise skal finne skjæringspunktet mellom $f(x) = 4x + 1$ og $g(x) = 2x + 9$. Hun skriver $2x = 10$ og $x = 5$. Hva er galt? Finn riktig skjæringspunkt.

2.60 Funksjonene er $f(x) = x + 3$ og $g(x) = 2x - 1$.

a) Finn skjæringspunktet.

b) For hvilke x er $g(x) > f(x)$?

2.61 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 6):
    f = 2 * x + 4
    g = x + 7
    if f == g:
        print(x, f)
```

2.62 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 8):
    f = 5 * x
    g = 3 * x + 8
    if f == g:
        print(x)
```

2.63 Grafene til $f(x) = 2x$ og $g(x) = -x + 9$ skjærer hverandre i et punkt. Linja $h(x) = ax - 3$ skal gå gjennom dette punktet. Hva er a?

2.64 Forklar hvorfor vi løser $f(x) = g(x)$ for å finne skjæringspunktet.

2.3.2 Sammenlikne tilbud

EKSEMPEL *To leiebilfirmaer*

Firma A har $f(x) = 3x + 500$ kroner for x kilometer, og firma B har $g(x) = 5x + 200$. Når koster de like mye? Hvilket er billigst for 100 km og for 200 km?

Løsning

$$\begin{aligned} 3x + 500 &= 5x + 200 \\ 300 &= 2x \\ x &= 150. \end{aligned}$$

Ved 150 km koster begge $f(150) = 3 \cdot 150 + 500 = 950$ kr.

For 100 km koster A 800 kr og B 700 kr, så B er billigst. For 200 km koster A 1 100 kr og B 1 200 kr, så A er billigst.

Konklusjon: B lønner seg hvis du kjører under 150 km, og A lønner seg hvis du kjører mer. Ved akkurat 150 km koster de like mye.

■

EKSEMPEL *Mobilabonnement og forbruk*

Abonnement A koster 299 kr i måneden, uansett forbruk. Abonnement B koster 149 kr pluss 20 kr for hver GB. Hva lønner seg hvis du bruker 6 GB? Hva om du bruker 9 GB?

Løsning

For 6 GB: A koster 299 kr, og B koster $20 \cdot 6 + 149 = 269$ kr. B er billigst.

For 9 GB: A koster fortsatt 299 kr, og B koster $20 \cdot 9 + 149 = 329$ kr. A er billigst.

Prisene er like når $20x + 149 = 299$, altså $x = 7{,}5$ GB. Er forbruket under 7,5 GB, lønner B seg, og er det over, lønner A seg. Konklusjonen avhenger altså av hvor mye du bruker. Prisen er heller ikke alt: Du kan også ha behov for å vite hva som skjer om du bruker mer enn du tror.

■

2.65 Taxi A tar 40 kr i startpris og 12 kr per kilometer. Taxi B tar 10 kr i startpris og 15 kr per kilometer. Skriv en funksjon for prisen for x kilometer hos hver.

2.66 Bruk taxiene fra forrige oppgave. Når koster de like mye, og hva koster en slik tur?

2.67 Bruk taxiene ovenfor. Hvilken er billigst for en tur på 6 km? På 20 km?

2.68 Senter A tar 350 kr i måneden. Senter B tar 900 kr i innmelding og 200 kr i måneden.

a) Etter hvor mange måneder har du betalt like mye?

b) Hvilket senter er billigst for 12 måneder?

2.69 Abonnement A koster 249 kr i måneden. Abonnement B koster 99 kr pluss 25 kr per GB.

a) For hvor mange GB koster de like mye?

b) Hvilket er billigst for 4 GB?

c) Hvilket er billigst for 10 GB?

2.70 Firma A leier ut en tilhenger for 200 kr pluss 50 kr per dag. Firma B tar 100 kr pluss 75 kr per dag.

a) Etter hvor mange dager koster de like mye?

b) Hvilket er billigst for 7 dager?

2.71 Strømavtale A koster 60 kr i måneden pluss 1 kr per kWh. Avtale B koster ingenting fast, men 1,50 kr per kWh.

a) Ved hvilket forbruk koster de like mye?

b) Hvilken er billigst for 200 kWh?

2.72 Hva må du vite om en person for å si hvilket mobilabonnement som lønner seg for vedkommende, når ett abonnement har fast pris og det andre har pris per GB?

2.73 Firma A: $f(x) = 3x + 500$. Firma B: $g(x) = 5x + 200$. Ida velger B fordi det har lavest startpris. Hun skal kjøre 300 km.

a) Hva koster det hos A?

b) Hva koster det hos B?

c) Hva har Ida oversett?

2.74 Jobb A gir 30 000 kr i måneden pluss 200 kr per solgte enhet. Jobb B gir 36 000 kr pluss 100 kr per enhet.

a) Hvor mange enheter må selges for at lønnen skal være lik?

b) Hva er lønnen da?

2.75 Bruk jobbene fra forrige oppgave. For hvor mange solgte enheter lønner jobb A seg best?

2.76 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 5):
    print(x, 50 + 10 * x, 30 + 20 * x)
```

Ved hvilken x koster tilbudene like mye?

2.77 Hva blir utskriften?

Python

```
for km in range(0, 101, 50):
    print(km, 100 + 2 * km, 50 + 4 * km)
```

2.78 Lag to tilbud som koster det samme etter 10 enheter. Skriv funksjonene.

2.79 Forklar hvordan antakelser om forbruk kan avgjøre hvilket tilbud som lønner seg.

2.4.1 Lage og tolke lineære modeller

EKSEMPEL *Elevtallet på skolen*

Elevtallet var 400 i 2019 og 440 i 2023. La x være antall år etter 2019. Lag en lineær modell, og bruk den til å finne elevtallet i 2026 og når det blir 500.

Løsning

Stigningstallet er $a = \dfrac{440 - 400}{4 - 0} = 10$, og konstantleddet er $b = 400$. Modellen er

$$f(x) = 10x + 400.$$

Tolkning: Elevtallet øker med 10 elever per år, og det var 400 elever i 2019.

I 2026 er $x = 7$, så $f(7) = 10 \cdot 7 + 400 = 470$ elever.

Elevtallet er 500 når $10x + 400 = 500$, altså $x = 10$. Det er i 2029. ∎

EKSEMPEL *Vanntanken*

Funksjonen $f(x) = -8x + 200$ gir antall liter i en tank etter x minutter. Når er tanken tom, og hva er gyldighetsområdet? Hva blir $f(30)$?

Løsning

Tanken er tom når $-8x + 200 = 0$, altså $x = 25$. Modellen gjelder for $0 \leqslant x \leqslant 25$.

Utenfor dette området gir modellen urimelige svar: $f(30) = -8 \cdot 30 + 200 = -40$ liter, og en tank kan ikke inneholde negative liter. ∎

EKSEMPEL *Høyde som funksjon av alder*

Et barn er 100 cm høyt som 4-åring og vokser 6 cm per år. Modellen er $h(x) = 6x + 76$, der x er alderen i år. Hva sier modellen at høyden er som 40-åring? Hva er gyldighetsområdet?

Løsning

$h(40) = 6 \cdot 40 + 76 = 316$ cm. Det er urimelig. Barn vokser ikke jevnt hele livet, så modellen gjelder bare for en kort periode, for eksempel fra 3 til 10 år. Å bruke den for en voksen er ekstrapolasjon langt utenfor dataene. ∎

2.80 Antall følgere på en konto er $f(x) = 15x + 20$ etter x uker.

a) Hva forteller tallet 15?

b) Hva forteller tallet 20?

c) Hvor mange følgere er det etter 8 uker?

2.81 En skole hadde 500 elever i 2018 og 600 i 2022. La x være antall år etter 2018.

a) Lag en lineær modell.

b) Hvor mange elever gir modellen i 2030?

2.82 Antall liter i en tank er $f(x) = -10x + 250$ etter x minutter.

a) Når er tanken tom?

b) Hva er et rimelig gyldighetsområde for x?

2.83 Snødybden er 90 cm, og den smelter 3 cm per dag. Modellen er $f(x) = -3x + 90$.

a) Hva er snødybden etter 10 dager?

b) Etter hvor mange dager er snøen borte?

2.84 En modell er $f(x) = 5x + 20$. Målingene for $x = 0, 1, 2, 3$ er $20, 26, 29, 36$. Finn avviket (målt minus modell) for hver x.

2.85 Du har målinger for $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ og lager en lineær modell. Er det interpolasjon eller ekstrapolasjon å bruke modellen for

a) $x = 3$?

b) $x = 20$?

2.86 En kommune hadde 8 000 innbyggere i 2010 og 8 500 i 2020. Anta lineær vekst, og la x være antall år etter 2010.

a) Finn stigningstallet.

b) I hvilket år passerer innbyggertallet 10 000?

2.87 Et lys er 30 cm høyt og brenner ned 2 cm i timen. Etter hvor mange timer er lyset brent ned? Hva er gyldighetsområdet for modellen $h(x) = -2x + 30$?

2.88 Høyden til en plante er $f(x) = 3x + 5$ centimeter etter x uker. Per regner ut at planten er 305 cm høy etter 100 uker. Hva er galt med å stole på dette?

2.89 Hva blir utskriften?

Python

```
data = [10, 13, 17, 20]
for x in range(4):
    print(x, data[x] - (3 * x + 10))
```

2.90 Hva blir utskriften?

Python

```
for x in range(0, 4):
    print(x, 4 * x + 7)
```

2.91 En bil har 40 liter bensin og bruker 0,5 liter per mil. Modellen er $f(x) = -0{,}5\,x + 40$ etter x mil.

a) Hvor mange liter er igjen etter 30 mil?

b) Hvor langt kommer bilen på hele tanken?

2.92 Tabellen viser verdier av en lineær modell.

x	0	2	4
$f(x)$	12	20	28

Finn modellen, og tolk a og b hvis x er antall uker og $f(x)$ er antall kroner.

2.93 Modell A er $f(x) = 20x + 100$, og modell B er $g(x) = 30x + 60$. Når gir de samme verdi, og hva er verdien?

2.94 Gi et eksempel på en lineær modell som ikke kan gjelde for alle x, og forklar hvorfor.

2.95 Prisen på et brød økte fra 30 kr til 35 kr på 5 år. Hva sier en lineær modell at brødet koster om 100 år? Hva er galt med denne prognosen?

Fasit

2.1.1 Stigningstall og konstantledd

2.1
a) 5
b) 11
c) 3
d) 25

2.2
a) 1
b) 17
c) -11
d) -3

2.3
a) $a = 3$ og $b = 7$
b) $a = -2$ og $b = 5$
c) $a = 1$ og $b = -4$
d) $a = 0$ og $b = 6$

2.4
a) Øker
b) Minker
c) Konstant
d) Øker

2.5
a) $150 \cdot 6 + 300 = 1\,200$ kr
b) $150x + 300 = 1\,800$ gir $150x = 1\,500$, så $x = 10$ måneder.

2.6
a) $f(x) = 20x + 60$
b) $f(15) = 20 \cdot 15 + 60 = 360$ kr
c) Prisen øker med 20 kr for hver kilometer.

2.7
a) $40 \cdot 5 + 120 = 320$ kr
b) Det er en fast avgift på 120 kr, prisen for 0 timer.

2.8
a) $f(x) = -15x + 600$
b) $f(10) = -150 + 600 = 450$ liter
c) $-15x + 600 = 0$ gir $x = 40$ minutter.

2.9
a) $f(x) = 200x + 1\,500$
b) $200 \cdot 12 + 1\,500 = 3\,900$ kr
c) $200x + 1\,500 = 5\,500$ gir $x = 20$ måneder.

2.10
a) $-800 \cdot 5 + 8\,000 = 4\,000$ kr
b) $-800x + 8\,000 = 0$ gir $x = 10$ år.

2.11
Mia legger sammen 5 og 2 før hun ganger. Riktig er $f(4) = 5 \cdot 4 + 2 = 22$.

2.12
Stigningstallet er tallet foran x, og det er -3. Tallet 8 er konstantleddet. Funksjonen kan skrives $g(x) = -3x + 8$.

2.13

```
0 2
1 5
2 8
3 11
```

2.14
Verdien øker med 3 for hver enhet x, så $a = 3$. Da gir $f(1) = 3 + b = 5$ at $b = 2$. Funksjonen er $f(x) = 3x + 2$.

2.15
Konstantleddet er $f(0) = 6$.
Stigningstallet er $f(1) - f(0) = 3$.
Funksjonen er $f(x) = 3x + 6$.

2.16
Setter vi $x = 0$, blir $ax = a \cdot 0 = 0$, så $f(0) = 0 + b = b$. Konstantleddet er derfor startverdien.

2.2.1 Tegne lineære grafer

2.17
$f(0) = 4$, $f(1) = 5$, $f(2) = 6$ og $f(3) = 7$.

2.18
$g(-1) = -3$, $g(0) = -1$, $g(1) = 1$ og $g(2) = 3$.

2.19
a) $(0, 5)$
b) $(0, 8)$
c) $(0, -6)$
d) $(0, 0)$

2.20
a) Ja, $f(2) = 4$.
b) Nei, $f(5) = 13$.
c) Ja, $f(-1) = -5$.
d) Ja, $f(0) = -2$.

2.21
a) $(1, 5)$, $(2, 8)$, $(3, 11)$, $(4, 14)$, så $f(4) = 14$.
b) $f(x) = 3x + 2$

2.22
a) $10 - 2 \cdot 3 = 4$
b) $g(x) = -2x + 10$
c) $-2x + 10 = 0$ gir $x = 5$, så i $(5, 0)$.

2.23
a) $x = 3$
b) $x = 5$
c) $x = -2$
d) $x = 2$

2.24
g, fordi den har størst stigningstall, 5. Grafen til h synker.

2.25
$(0, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ og $(3, 0)$.

2.26
y-aksen: $(0, -8)$. x-aksen: $2x - 8 = 0$ gir $x = 4$, så $(4, 0)$.

2.27
Konstantleddet er -2, ikke 2. Han skal starte i $(0, -2)$.

2.28
Tallet 6 er konstantleddet, altså skjæringen med y-aksen. For x-aksen løser vi $2x + 6 = 0$, som gir $x = -3$.

2.29
Grafen skjærer y-aksen i $(0, 6)$ og x-aksen i $(6, 0)$. Arealet er $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

2.30

```
0 -5
1 -3
2 -1
3 1
```

2.31
3, fordi $-3 \cdot 3 + 9 = 0$.

2.32
Stigningstallet er $\frac{8 - 2}{3 - 0} = 2$, så $f(x) = 2x + 2$ og $k = f(5) = 12$.

2.33
Konstantleddet er 6, så grafen går gjennom $(0, 6)$. Stigningstallet er -2, så for hvert steg 1 til høyre går grafen 2 ned: $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(3, 0)$. Så trekker jeg en rett linje gjennom punktene.

2.2.2 Finne funksjonsuttrykket

2.34
a) $\frac{5 - 1}{2 - 0} = 2$
b) $\frac{11 - 2}{4 - 1} = 3$
c) $\frac{0 - 8}{4 - 0} = -2$
d) $\frac{9 - 1}{2 - (-2)} = 2$

2.35
a) $6 + b = 10$, så $b = 4$
b) $-2 + b = 3$, så $b = 5$
c) $4 + b = 1$, så $b = -3$

2.36
a) $a = 2$ og $b = 3$: $f(x) = 2x + 3$
b) $a = 3$, og $3 + b = 2$ gir $b = -1$: $f(x) = 3x - 1$
c) $a = -1$ og $b = 5$: $f(x) = -x + 5$
d) $a = -2$, og $-4 + b = 3$ gir $b = 7$: $f(x) = -2x + 7$

2.37
$a = 3$, og $3 + b = 5$ gir $b = 2$. Funksjonen er $f(x) = 3x + 2$, så $f(10) = 32$.

2.38

a) $\frac{260-140}{10-4} = 20$ kr per km

b) $20 \cdot 4 + b = 140$ gir $b = 60$ kr

c) $f(x) = 20x + 60$

2.39

a) $\frac{330-180}{5-2} = 50$ kr per måned

b) $50 \cdot 2 + b = 180$ gir $b = 80$, så $f(x) = 50x + 80$.

2.40

a) $\frac{17-5}{4} = 3$ grader per time

b) $f(x) = 3x + 5$, så $f(10) = 35\,^\circ$ C

2.41

a) $a = \frac{250-400}{4-1} = -50$, og $-50 + b = 400$ gir $b = 450$. Funksjonen er $f(x) = -50x + 450$.

b) $-50x + 450 = 0$ gir $x = 9$ timer.

2.42

Ola deler endringen i x på endringen i y. Riktig er $\frac{12-4}{6-2} = 2$.

2.43

Konstantleddet er verdien når $x = 0$, ikke y-verdien til punktet. Riktig er $2 \cdot 1 + b = 5$, som gir $b = 3$.

2.44

a) Ja. Stigningstallet er 2 både mellom første og andre og mellom andre og tredje punkt.

b) Nei. Stigningstallet er $\frac{8-2}{2} = 3$ først og $\frac{12-8}{2} = 2$ etterpå.

2.45

$a = \frac{13-5}{6-2} = 2$, og $2 \cdot 2 + b = 5$ gir $b = 1$. Linja skjærer y-aksen i $(0, 1)$.

2.46

3.0 1.0, fordi $a = \frac{10-4}{3-1} = 3$ og $b = 4 - 3 \cdot 1 = 1$.

2.47

-2.0 6.0, fordi $a = \frac{0-6}{3-0} = -2$ og $b = 6 - (-2) \cdot 0 = 6$.

2.48

Timeprisen er $\frac{1\,350-750}{7-3} = 150$ kr.

Fast avgift: $150 \cdot 3 + b = 750$ gir $b = 300$ kr. Funksjonen er $f(x) = 150x + 300$.

2.49

Det finnes bare én rett linje gjennom to punkter. De to punktene gir stigningstallet, og når jeg setter inn ett av dem, får jeg konstantleddet. Da er funksjonen bestemt.

2.3.1 Skjæringspunkt mellom grafer

2.50

a) $x = 4$

b) $2x = 10$, så $x = 5$

c) $3x = 12$, så $x = 4$

d) $9 = 3x$, så $x = 3$

2.51

$x + 2 = -x + 8$ gir $x = 3$. Da er $y = 3 + 2 = 5$. Skjæringspunktet er $(3, 5)$.

2.52

$2x - 3 = x + 1$ gir $x = 4$. Da er $y = 2 \cdot 4 - 3 = 5$. Skjæringspunktet er $(4, 5)$.

2.53

a) Ja, $f(2) = 7$ og $g(2) = 7$.

b) Nei, $f(1) = 4$, men $g(1) = 5$.

2.54

a) $f(x) = 100x + 500$ og $g(x) = 200x + 100$

b) $100x + 500 = 200x + 100$ gir $400 = 100x$, så $x = 4$ måneder.

c) $100 \cdot 4 + 500 = 900$ kr

2.55

Etter 2 måneder har Ida 700 kr og Kari 500 kr, så Ida har mest. Etter 6 måneder har Ida 1 100 kr og Kari 1 300 kr, så Kari har mest.

2.56

Ingen. Linjene har samme stigningstall, men ulike konstantledd, så de er parallelle. Likningen $3x + 2 = 3x - 4$ gir $2 = -4$, som aldri stemmer.

2.57

Uendelig mange. Funksjonene er like, så grafene er den samme linja, og alle punkter på den er felles.

2.58

y-aksen: $(0, -6)$. x-aksen: $2x - 6 = 0$ gir $x = 3$, så $(3, 0)$.

2.59

Hun regner $9 + 1$ i stedet for $9 - 1$. Riktig er $2x = 8$, så $x = 4$. Da er $y = 4 \cdot 4 + 1 = 17$, og skjæringspunktet er $(4, 17)$.

2.60

a) $x + 3 = 2x - 1$ gir $x = 4$ og $y = 7$, altså $(4, 7)$.

b) g stiger raskest, så $g(x) > f(x)$ for $x > 4$.

2.61

3 10, fordi $2 \cdot 3 + 4 = 10$ og $3 + 7 = 10$.

2.62

4, fordi $5 \cdot 4 = 20$ og $3 \cdot 4 + 8 = 20$.

2.63

$2x = -x + 9$ gir $x = 3$ og $y = 6$. Linja h går gjennom $(3, 6)$ når $3a - 3 = 6$, altså $a = 3$.

2.64

I skjæringspunktet har grafene samme x og samme y. Da må $f(x) = g(x)$. Løsningen av likningen er x-koordinaten, og y finner jeg ved å sette x inn i en av funksjonene.

2.3.2 Sammenlikne tilbud

2.65

$f(x) = 12x + 40$ for A og $g(x) = 15x + 10$ for B.

2.66

$12x + 40 = 15x + 10$ gir $30 = 3x$, så $x = 10$ km. Prisen er $12 \cdot 10 + 40 = 160$ kr.

2.67

For 6 km koster A 112 kr og B 100 kr, så B er billigst. For 20 km koster A 280 kr og B 310 kr, så A er billigst.

2.68

a) $350x = 200x + 900$ gir $150x = 900$, så $x = 6$ måneder.

b) A koster 4 200 kr og B koster $200 \cdot 12 + 900 = 3\,300$ kr. B er billigst.

2.69

a) $25x + 99 = 249$ gir $x = 6$ GB.

b) B koster 199 kr og A koster 249 kr, så B er billigst.

c) B koster 349 kr og A koster 249 kr, så A er billigst.

2.70

a) $50x + 200 = 75x + 100$ gir $100 = 25x$, så $x = 4$ dager.

b) A koster 550 kr og B koster 625 kr, så A er billigst.

2.71

a) $x + 60 = 1{,}5\,x$ gir $60 = 0{,}5\,x$, så $x = 120$ kWh.

b) A koster 260 kr og B koster 300 kr, så A er billigst.

2.72

Du må vite omtrent hvor mange GB personen bruker per måned. Er forbruket under skjæringspunktet, lønner abonnementet med pris per GB seg. Er det over, lønner fastprisen seg.

2.73

a) $3 \cdot 300 + 500 = 1\,400$ kr

b) $5 \cdot 300 + 200 = 1\,700$ kr

c) Hun har bare sett på startprisen. Prisen per kilometer er høyere hos B, og for lange turer er A billigst.

2.74
a) $200x + 30\,000 = 100x + 36\,000$ gir $100x = 6\,000$, så $x = 60$.
b) $200 \cdot 60 + 30\,000 = 42\,000$ kr

2.75
Jobb A har lavest fast lønn, men høyest lønn per enhet. For $x > 60$ gir A mest.

2.76

```
0 50 30
1 60 50
2 70 70
3 80 90
4 90 110
```

De koster like mye ved $x = 2$.

2.77

```
0 100 50
50 200 250
100 300 450
```

2.78
Et eksempel: $f(x) = 5x + 100$ og $g(x) = 10x + 50$. Begge koster 150 ved $x = 10$. Alle svar der $a_1 \cdot 10 + b_1 = a_2 \cdot 10 + b_2$ er riktige.

2.79
Tilbudene koster likt ved et bestemt forbruk (skjæringspunktet). Er forbruket under, er det ene billigst, og er det over, er det andre billigst. Derfor avhenger konklusjonen av hva vi antar om forbruket, og vi må si det i svaret.

2.4.1 Lage og tolke lineære modeller

2.80
a) Det kommer 15 nye følgere hver uke.
b) Det var 20 følgere ved start.
c) $15 \cdot 8 + 20 = 140$

2.81
a) $a = \dfrac{600 - 500}{4} = 25$ og $b = 500$, så $f(x) = 25x + 500$.
b) 2030 gir $x = 12$, så $f(12) = 25 \cdot 12 + 500 = 800$ elever.

2.82
a) $-10x + 250 = 0$ gir $x = 25$ minutter.
b) $0 \leqslant x \leqslant 25$

2.83
a) $-3 \cdot 10 + 90 = 60$ cm
b) $-3x + 90 = 0$ gir $x = 30$ dager.

2.84
Modellverdiene er $20, 25, 30, 35$. Avvikene er 0, 1, -1 og 1.

2.85
a) Interpolasjon, fordi 3 ligger innenfor måleområdet.
b) Ekstrapolasjon, fordi 20 ligger langt utenfor måleområdet. Det er mer usikkert.

2.86
a) $\dfrac{8\,500 - 8\,000}{10} = 50$ innbyggere per år
b) $50x + 8\,000 = 10\,000$ gir $x = 40$, altså i 2050.

2.87
$-2x + 30 = 0$ gir $x = 15$ timer.
Modellen gjelder for $0 \leqslant x \leqslant 15$.

2.88
Utregningen er riktig, men 100 uker er langt utenfor det området modellen er laget for. Planter vokser ikke jevnt så lenge, så svaret er urimelig. Modellen gjelder bare for en begrenset periode.

2.89

```
0 0
1 0
2 1
3 1
```

2.90

```
0 7
1 11
2 15
3 19
```

2.91
a) $-0{,}5 \cdot 30 + 40 = 25$ liter
b) $-0{,}5x + 40 = 0$ gir $x = 80$ mil.

2.92
$a = \dfrac{28 - 12}{4 - 0} = 4$ og $b = 12$, så $f(x) = 4x + 12$. Det øker med 4 kroner per uke, og startverdien er 12 kroner.

2.93
$20x + 100 = 30x + 60$ gir $40 = 10x$, så $x = 4$. Verdien er $20 \cdot 4 + 100 = 180$.

2.94
Vanntanken $f(x) = -10x + 250$ gir negative liter for $x > 25$, og det er umulig. Modellen gjelder derfor bare for $0 \leqslant x \leqslant 25$.

2.95
Modellen er $f(x) = x + 30$, så om 100 år koster brødet 130 kr. Prognosen er usikker, fordi 100 år er langt utenfor måleområdet (ekstrapolasjon). Priser øker ikke nødvendigvis jevnt så lenge.